

Technische Universität Ilmenau

Institut für Mathematik



Preprint No. M 11/05

**Numerische Approximation
von Funktionen**

Hans Babovsky, Werner Neundorf

Februar 2011

Impressum:

Hrsg.: Leiter des Instituts für Mathematik
Weimarer Straße 25
98693 Ilmenau

Tel.: +49 3677 69-3621

Fax: +49 3677 69-3270

<http://www.tu-ilmenau.de/math/>

ilmedia

Technische Universität Ilmenau
Fakultät für Mathematik
und Naturwissenschaften
Institut für Mathematik
<http://www.tu-ilmenau.de/math/>

Postfach 10 05 65
D - 98684 Ilmenau
Germany
Tel.: 03677/69 3267
Fax: 03677/69 3272
Telex: 33 84 23 tuil d.
email:
hans.babovsky@tu-ilmenau.de
werner.neundorf@tu-ilmenau.de

Preprint No. M 05/11

Numerische Approximation von Funktionen

Hans Babovsky und Werner Neundorf

Februar 2011

Zusammenfassung

Es gibt viele Gründe in der Mathematik, Näherungen zu untersuchen.

In der Geometrie lassen sich komplizierte Objekte oft durch Polygone nähern. So berechnete zum Beispiel Archimedes eine Näherung für die Kreiszahl π , indem er einen Kreis durch regelmäßige Vielecke mit immer mehr Ecken annäherte.

Von besonderem Interesse ist die Näherung von Funktionen, Kurven, Flächen oder anderen Gebilden. Die numerische Approximation von Kurven mit Polynomen ist dabei ein zentraler Punkt. Das theoretische Grundgerüst dafür schuf Karl Weierstraß mit seinem Approximationssatz.

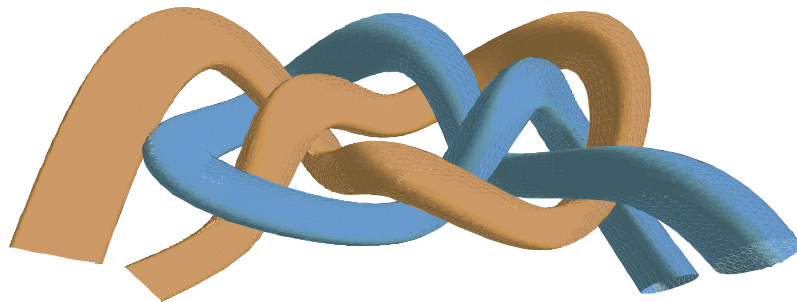
In der vorliegenden Arbeit, die auf der Basis einer Vorlesung in der Ausbildung von Ingenieuren und Informatikern an der TU Ilmenau entstand, werden Aspekte der Approximation mittels Bézier-Kurven und Splines für Kurven und Flächen behandelt. Sie spielen beim rechnerunterstützten Entwerfen (Computer Aided Design) in vielen Bereichen des Ingenieurwesens eine wichtige Rolle.

Godfrey Harold Hardy 1940

*Das entscheidende Kriterium ist Schönheit;
für hässliche Mathematik ist auf dieser Welt
kein beständiger Platz.*

Albrecht Beutelspacher

*Mathematik ist eine basisdemokratische
Wissenschaft. Jeder kann eine logische
Argumentation nachvollziehen.*



Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	3
1.1	Vorbemerkungen	3
1.2	Punkte und Vektoren	6
1.3	Affine Abbildungen	10
1.4	Typen von Flächen- bzw. Kurvendarstellungen	12
2	Bézier-Kurven	16
2.1	Parametrische Kurven	16
2.2	Bernstein-Polynome	19
2.3	Bézier-Darstellungen von Kurven	26
2.4	Ableitungen von Bézier-Kurven	31
2.5	Weierstraßscher Approximationssatz	34
3	Der Algorithmus von de Casteljau	38
3.1	Parametrisierung einer Parabel	38
3.2	De Casteljau's Algorithmus	39
4	Designtechniken für Bézier-Kurven	44
4.1	Graderhöhung	44
4.2	Gradreduktion	52
4.3	Zusammengesetzte Bézier-Kurven	57
5	Interpolation	61
5.1	Polynominterpolation im \mathbb{R}^1	61
5.1.1	Lagrange-Interpolation	62
5.1.2	Newton-Interpolation	63
5.1.3	Hermite-Interpolation	66
5.1.4	Allgemeine Referenz	69
5.1.5	Kubische Hermite-Basis	70
5.2	Fehler und Konvergenz	71
5.2.1	Konvergenzsätze	75

6	Splinekurven	77
6.1	Splineinterpolation im \mathbb{R}^1	77
6.2	Einfache Typen von Splines	78
6.3	Kubische Splines	83
6.4	B-Splines	94
6.5	Krümmung einer Kurve	118
6.6	Parametrische kubische Splines	121
6.7	Berechnung kubischer Splines mittels Bézier-Kurven	122
7	Tensorprodukt-Bézier-Flächen	133
7.1	Bilineare Interpolation	133
7.2	Bézier-Flächen	138
7.3	Ableitungen	142
8	Zusammengesetzte Flächen	146
8.1	Glatte Übergänge	146
8.2	Bikubische \mathcal{C}^1 -Flächen	147
8.3	Dreieckspatches	150
9	Übungsserien	152
	Literaturverzeichnis	166

1 Einführung

1.1 Vorbemerkungen

Rechnerunterstütztes Entwerfen ist eine Disziplin, die in vielen Bereichen des Ingenieurwesens von zunehmender Bedeutung ist.

Man bezeichnet diesen Prozess als **Computer Aided Design** (CAD) oder bei Schwerpunktlegung auf seine mathematische Seite als **Computer Aided Geometric Design** (CAGD). Man versteht unter CAD bzw. CAGD all die Techniken, bei denen Computer zum Entwurf von Produkten Verwendung finden.

Diese Produkte (Modelle) basieren auf einer mathematischen Beschreibung der geometrischen Form, die es beispielsweise erlaubt, Zeichnungen zu erstellen oder Befehle für numerisch gesteuerte Werkzeugmaschinen (CNC-Maschinen) zu erzeugen. Während der konventionelle Entwurf am zweidimensionalen Zeichenbrett durchgeführt wird, müssen für den Einsatz des Computers spezifische Methoden entwickelt werden.

Computer-Grafik spielt dabei eine große Rolle. Im CAGD werden mathematische Grundlagen für die Computer-Grafik bereitgestellt.

Typische Anwendungen von CAD und CAGD

- Grafische Darstellung großer Daten zur Übersicht
- Digitale Darstellung von Modellen im Anlagebau zur strukturellen Optimierung von Leitungssystemen
- Beschreibung und Gestaltung von Teilen/Oberflächen im Automobil-, Flugzeug-, Schiffs- und Bergbau, Schuhindustrie und anderen Industriezweigen
- Numerisch gesteuerte Fertigung von Formen und Werkteilen
- Kartographie
- Planung und Überwachung von Operationsergebnissen in der Medizin
- Fernsehen, Werbung, Media, Computeranimation
- Beschreibung von Roboterbahnen und Bewegungen, Mikromechanik, Raumfahrt
- Typische mathematische Anwendungen:
Darstellung von Lösungen von Differentialgleichungen, Topologie, Differentialgeometrie, Darstellung von Mannigfaltigkeiten, Variationsrechnung, Konstruktion von Minimalflächen (Plateau-Problem)

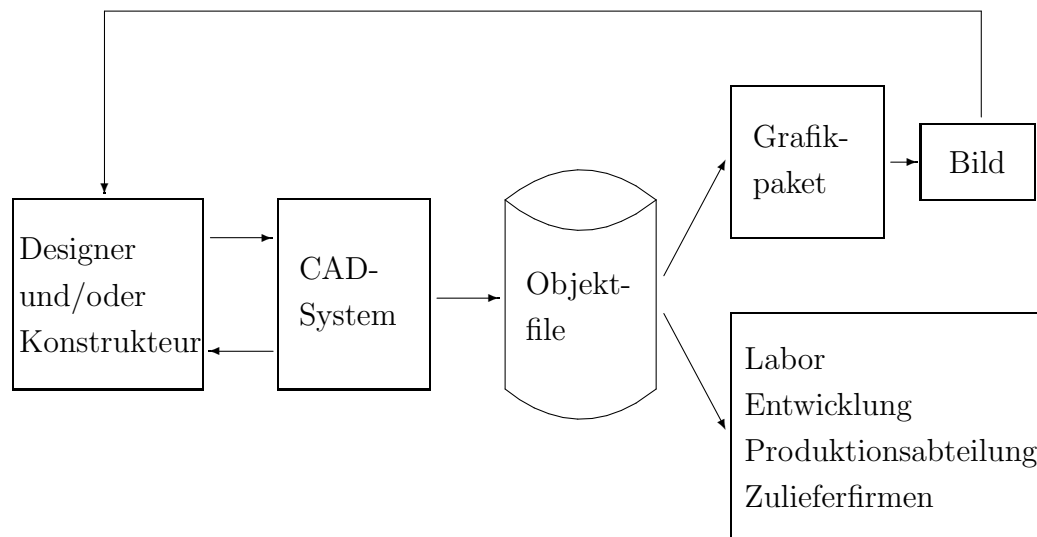
CAD-System aus der Automobilindustrie

als ein Baustein eines aufwendigen Entwicklungsprozesses zur Erstellung eines Modells. Ein Designer oder Konstrukteur sitzt an seinem Terminal und entwirft das Modell als Prototyp unter Zuhilfenahme des CAD-Systems. Anschließend möchte er gerne eine Visualisierung seines Modells, um auch einen optischen Eindruck seines Prototypen zu erhalten.

Das bedeutet, dass das CAD-System eine sogenannte Objektdatei herauschreiben muss, in der alle Daten des Modells enthalten sind. Diese Datei wird dann von einem Grafikpaket eingelesen und visuell umgesetzt. Eine mehrdimensionale Ansicht des Objektes ist nun möglich. Die Qualität des Bildes hängt stark von der Güte des CAD-Systems sowie des Grafikpaketes ab.

Sollte das Modell noch fehlerhaft sein, so können vom Designer oder Konstrukteur nochmals Änderungen vorgenommen, danach werden die Daten wieder über die Objektdatei an das Grafikpaket gegeben, um das Resultat der Änderung zu betrachten. Dieser Vorgang wird so lange wiederholt, bis das Modell die erwartete Qualität und Eigenschaften besitzt. Das korrekte Modell kann jetzt hergestellt werden. Die Daten (Objektdatei) werden weitergeleitet an die Labors/Entwicklungs-/Produktionsabteilungen, die ihrerseits die Herstellungsroboter mit diesen Daten speisen. Oder, ein anderer Weg, Zulieferfirmen bekommen die Daten und stellen die gewünschten Teile dann danach her.

Problem: Visualisierung eines Objektes



Diese kurze Schilderung zeigt deutlich die zentrale Bedeutung der Objektdateien, denn nur dadurch können verschiedene Systeme sinnvoll ihre Daten austauschen.

Ein weiterer, sich stetig ausweitender Bereich, ist die Computeranimation, womit die Erzeugung von Filmsequenzen unter Verwendung des Computers gemeint ist. Hier wird mit einem Modellersystem ein Objekt entwickelt und animiert, um anschließend Bild für Bild zu berechnen. Das Ergebnis ist eine n -dimensionale Darstellung ($n = 1, 2$) einer $(n + 1)$ -dimensionalen Szene bzw. auch dreidimensionale Bilder im zeitlichen Ablauf. Auch hier bildet der Datensatz des Objektes eine zentrale Rolle.

Was nun aber sind die Anforderungen an ein mathematisches Modell, das die bereits geschilderten Möglichkeiten erbringt?

Die Verarbeitung der geometrischen Informationen ist ein zentraler Punkt beim Computereinsatz im Entwurfsbereich. Man versteht darunter das mathematische Modell, die Manipulation, die Analyse und Synthese von Gestaltinformationen im Computer. Dabei ist das computerorientierte Objekt vom Verwendungszweck abhängig. Bei Anwendungen in der Luftfahrttechnik oder im Automobil- und Schiffbau braucht man oft Kurven und Flächen, während im konventionellen Maschinenbau eine Zeichnung hauptsächlich aus Geraden und Bögen besteht. Es ist unausweichlich, dass eine Autokarosserie eine recht komplexe Topologie aufweist, weshalb die Verwendung von Flächen höherer Ordnung notwendig wird. Eine Motorwelle hingegen besteht im Allgemeinen aus geometrisch einfachen Flächen (Zylinder, Kreis usw.).

Außerdem muss das geometrische Modell eine komplette Definition des Objekts erlauben, die für alle nachfolgenden Manipulationen oder Verwendungen des Objektes die Grundlage bildet.

Ein Computermode'll soll passend für alle zwei- und dreidimensionalen Objekte sein. Hierbei treten, wie am Beispiel des Visualisierens eines Modells beschrieben, verschiedene Komplikationen auf, denn die Welt, in der wir leben, ist dreidimensional, hingegen ist der Speicher eines Computers im Allgemeinen eindimensional (sequentiell) angelegt. Zusätzlich ist die Visualisierung der Modelle mehrdimensional. Diese Transformationen erhöhen die Anforderungen an die Beschreibungen der Modelle im Computer.

Wichtig ist, dass sich in den CAD-Systemen einheitliche mathematische Formate zur Beschreibung (Standardisierung, Normierung) herausbilden, um eine große Portabilität der Modelle zu ermöglichen.

1.2 Punkte und Vektoren

Die **Darstellung von Objekten** erfordert ein Koordinatensystem.

Die **Methoden der Darstellung** sollen aber unabhängig von Wahl des Koordinatensystems sein. Deshalb ist eine Unterscheidung zwischen *Punkten* und *Vektoren* notwendig.

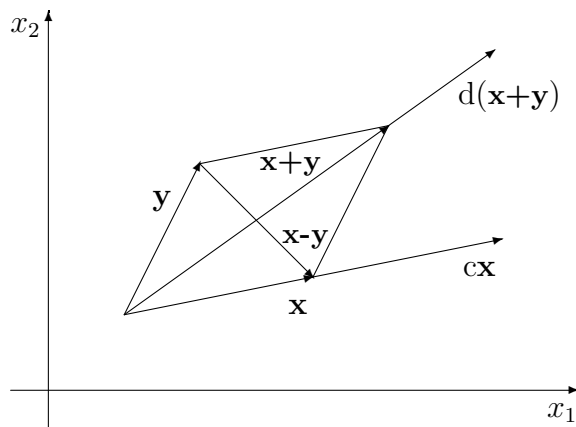
Punktraum \mathbb{E}^n (euklidischer Raum, affiner Raum): Elemente $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T$, \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{x} , ... beschreiben Position von Punkten (Ortsvektoren) bez. eines festen Koordinatensystems, manchmal auch Notation mit \mathbb{E}^d , $d = 2, 3$,

Vektorraum \mathbb{R}^n : Elemente $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, \mathbf{y} , \mathbf{w} , ... beschreiben relative Positionen von Ortsvektoren, Verschiebungen usw.

(1.2) Rechenoperationen

(1) Zu $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ sind definiert $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ sowie die Skalarmultiplikation $c\mathbf{x}$, $c \in \mathbb{R}$.

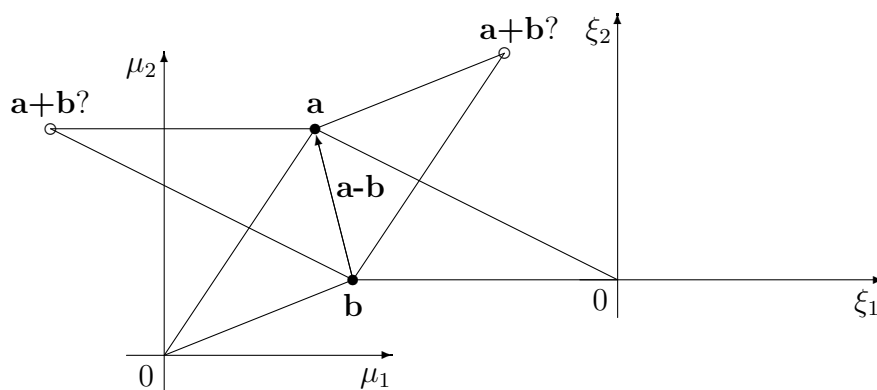
Abb. 1.1 Vektoroperationen im \mathbb{R}^2



(2) Zu $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ ist $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ definiert. Jeder Vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ kann als Differenz $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ mit $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ dargestellt werden.

(3) Zu $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{E}^n$ ist nicht definiert $\mathbf{a} + \mathbf{b}$.

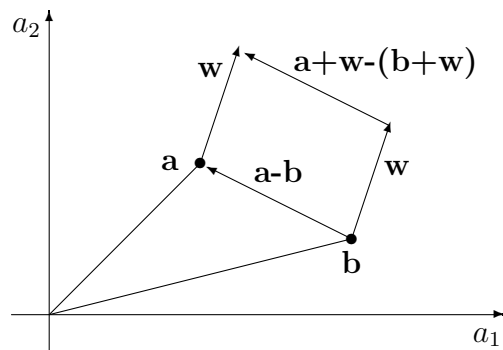
Abb. 1.2 Punktoperationen im \mathbb{E}^2



Eine einfache Verschiebung des Koordinatensystems sollte die Operation $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ nicht verändern.

(4) Zu $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^n$ und $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ist $\mathbf{a} + \mathbf{w} \in \mathbb{E}^n$ definiert (*Translation, Verschiebung*).

Abb. 1.3 Translationen im \mathbb{E}^2



Vektoren sind invariant bez. einer Translation, denn $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{w} - (\mathbf{b} + \mathbf{w})$.

(5) *Baryzentrische Kombination (affine Kombination)*

Zu $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{E}^n$ und reellwertigen Koeffizienten c_0, \dots, c_k mit $\sum_{j=0}^k c_j = 1$ ist

$$\mathbf{a} = \sum_{j=0}^k c_j \mathbf{a}_j$$

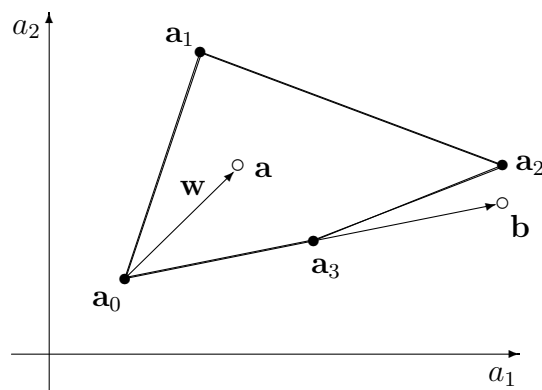
als Element in \mathbb{E}^n definiert, denn

$$\mathbf{a} = \sum_{j=0}^k c_j \mathbf{a}_j + \mathbf{a}_0 - \left(\sum_{j=0}^k c_j \right) \mathbf{a}_0 = \sum_{j=0}^k c_j \underbrace{(\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0)}_{\in \mathbb{R}^n} + \underbrace{\mathbf{a}_0}_{\in \mathbb{E}^n} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{w}.$$

Diese Summe ist nach (4) definiert, da $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{E}^n$ und wegen (2) und (1) gilt die Beziehung

$$\sum_{j=0}^k c_j (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_0) \in \mathbb{R}^n.$$

Abb. 1.4 Baryzentrische Kombination und konvexe Hülle im \mathbb{E}^2



Geometrische Interpretation: Je stärker ein Gewicht c_j ist, desto mehr zieht \mathbf{a}_j die Kombination an. Ist ein $c_k = 1$, so verschwinden die anderen Gewichte und $\mathbf{a} = \mathbf{a}_k$.

Der Punkt \mathbf{b} ist auch eine baryzentrische Kombination.
Es gilt

$$\mathbf{b} = \sum_{j=0}^k d_j \mathbf{a}_j = -\mathbf{a}_0 + 2\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3 + (\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_0), \quad \sum_{j=0}^k d_j = 1,$$

aber \mathbf{b} liegt nicht in der konvexen Hülle der Punkte \mathbf{a}_j .

(1.3) Definition Gegeben seien $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k \in \mathbb{E}^n$. Die Menge aller Punkte der Form

$$\mathbf{a} = \sum_{j=0}^k c_j \mathbf{a}_j$$

mit $c_j \geq 0$ und $\sum_{j=0}^k c_j = 1$ heißt *konvexe Hülle* von $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k$.

Wir notieren diese als $H = [\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k]$.

(1.4) Beispiel (a) Es seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^n$. Der Punkt

$$\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b} + \frac{1}{3}\mathbf{c}$$

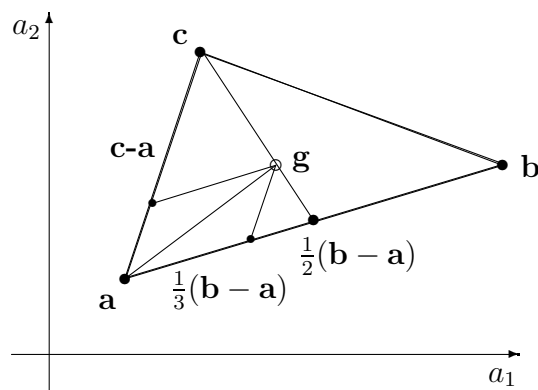
ist der Schwerpunkt dreier gleicher Punktmassen in den Punkten $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.

\mathbf{g} hängt nur von der relativen Lage zu \mathbf{a}, \mathbf{b} und \mathbf{c} ab.

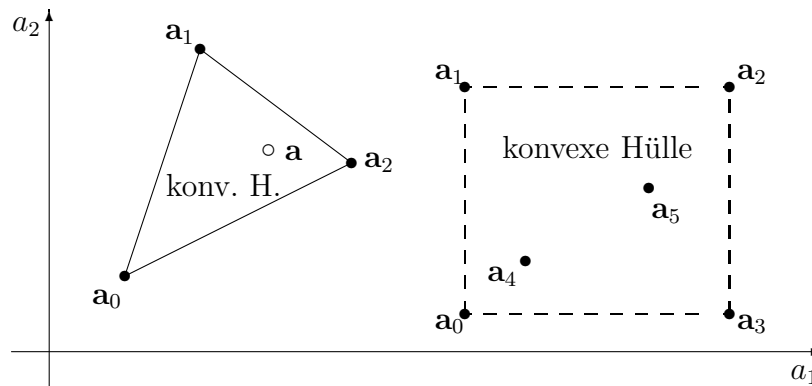
Herkunft des Namens: *barycenter* heißt Gravitationszentrum bzw. Schwerpunkt.

Abb. 1.5 Schwerpunkt \mathbf{g} eines Dreiecks

$$\mathbf{g} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{3}(\mathbf{c} - \mathbf{a} - \frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a})) = \mathbf{a} + \frac{1}{3}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + \frac{1}{3}(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$



(b) Liegen die Punkte $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ und $\mathbf{a}_2 \in \mathbb{E}^2$ nicht auf einer Geraden, so ist die konvexe Hülle wohl definiert, ansonsten degeneriert.

Abb. 1.6 Konvexe Hüllen $H = [\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_k]$ im \mathbb{E}^2 

Jeder Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^2$ im Dreieck lässt sich eindeutig darstellen als

$$\mathbf{a} = \sum_{j=0}^2 c_j \mathbf{a}_j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^2 c_j = 1.$$

Interpretation als Massensystem: Die Größen c_j repräsentieren *Gewichte*.

Die Verschiebung zugunsten des Gewichts c_j bedeutet eine Annäherung (Anziehung) an den Punkt \mathbf{a}_j .

(c) Die baryzentrische Kombination liefert einen Punkt als gewichtete Summe von Punkten, wobei $\sum \text{Gewichte} = 1$ ist. Bei der Hülle sind die Gewichte nicht negativ.

Wollen wir aber einen Vektor \mathbf{x} aus einer Punktmenge generieren, so erinnern wir uns an den einfachen Fall

$$\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = 1 \cdot \mathbf{a} - 1 \cdot \mathbf{b}, \quad 1 - 1 = 0.$$

Also gilt generell

$$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^k c_j \mathbf{a}_j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^k c_j = 0.$$

(d) Betrachten wir nun allgemein eine Linearkombination zur Erzeugung eines Punktes \mathbf{a} gemäß

$$\mathbf{a} = \sum_{j=0}^k d_j \mathbf{a}_j \quad \text{mit} \quad \sum_{j=0}^k d_j \neq 1.$$

Ihre rechte Seite spalten wir auf in zwei Anteile

$$\mathbf{a} = \sum_{\substack{d_j \\ \sum d_j = 1}} d_j \mathbf{a}_j + \sum_{\text{restliche } d_k} d_k \mathbf{a}_k.$$

Der erste Summand ist eine baryzentrische Kombination aus Punkten \mathbf{a}_j und ergibt einen Punkt, der zweite Summand kann dann nur ein Vektor sein, so dass auch die darin enthaltenen Komponenten \mathbf{a}_k selber Vektoren sein müssen, damit das Ganze Sinn macht.

1.3 Affine Abbildungen

(1.5) Definition Eine Transformation $\Phi : \mathbb{E}^n \rightarrow \mathbb{E}^n$ heißt *affine Abbildung*, wenn sie von der Form ist

$$\mathbf{x} \longrightarrow \Phi \mathbf{x} = A\mathbf{x} + \mathbf{v}$$

mit einem Vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ und einer reellen $(n \times n)$ -Matrix A .

Manchmal verwendet man auch die Notation $\Phi = \Phi(\mathbf{x})$.

(1.6) Bemerkung (a) Affine Kombinationen sind invariant unter affinen Abbildungen. Ist

$$\mathbf{a} = \sum_{j=0}^k c_j \mathbf{a}_j$$

eine affine Kombination von \mathbf{a}_j , $j = 0, \dots, k$, so ist $\Phi \mathbf{a}$ die affine Kombination von $\Phi \mathbf{a}_j$, $j = 0, \dots, k$, mit den gleichen Gewichten c_j , denn es gilt wegen der Linearität von Φ

$$\Phi \mathbf{a} = A\mathbf{a} + \mathbf{v} = A \left(\sum_{j=0}^k c_j \mathbf{a}_j \right) + \mathbf{v} = \sum_{j=0}^k c_j A\mathbf{a}_j + \mathbf{v} \underbrace{\sum_{j=0}^k c_j}_{=1} = \sum_{j=0}^k c_j (A\mathbf{a}_j + \mathbf{v}) = \sum_{j=0}^k c_j \Phi \mathbf{a}_j.$$

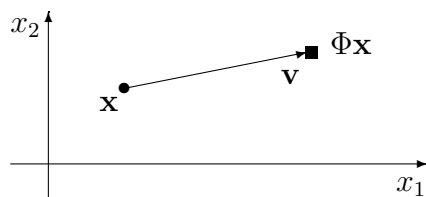
(b) Es gilt auch die Umkehrung. Jede Abbildung Φ , welche affine Kombinationen invariant lässt, ist affin.

(1.7) Beispiel Affine Abbildungen mit $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n$

(a) *Identische Abbildung* $\mathbf{v} = 0$, $A = I$ (Einheitsmatrix in $\mathbb{R}^{n \times n}$), d.h. $\Phi \mathbf{x} = \mathbf{x}$.

(b) *Translation* $A = I$, d. h. $\Phi \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{v}$.

Abb. 1.7 Translation eines Punktes aus \mathbb{E}^2



(c) *Skalierung* $\mathbf{v} = 0$, A Diagonalmatrix, d. h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_{nn} \end{pmatrix},$$

$$\Phi \mathbf{x} = A\mathbf{x} = \sum_{j=1}^n a_{jj} x_j \mathbf{e}_j.$$

(d) *Drehung* $\mathbf{v} = 0$, A Drehmatrix.

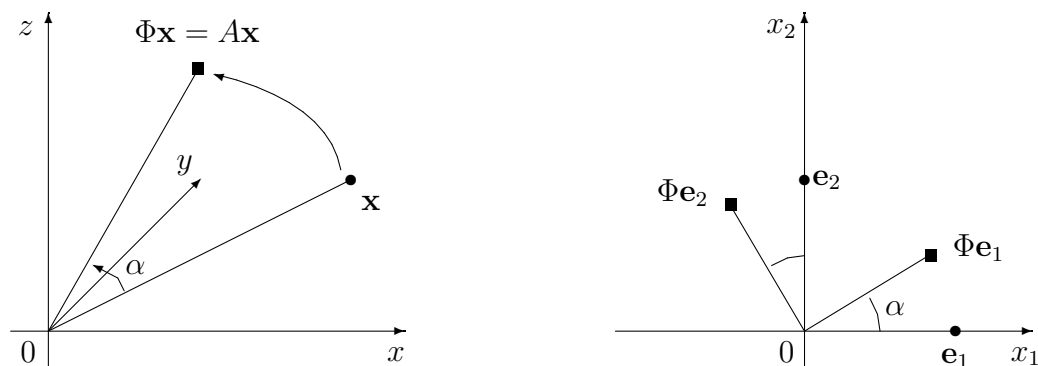
(1.8) Beispiel (a) Für $n = 3$ erfolgt eine Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn um z -Achse durch

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Für $n = 2$ beschreibt man die Drehungen der Einheitspunkte (damit Einheitsvektoren) durch

$$A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}, \quad A\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Abb. 1.8 Drehungen von Punkten aus \mathbb{E}^3 bzw. \mathbb{E}^2

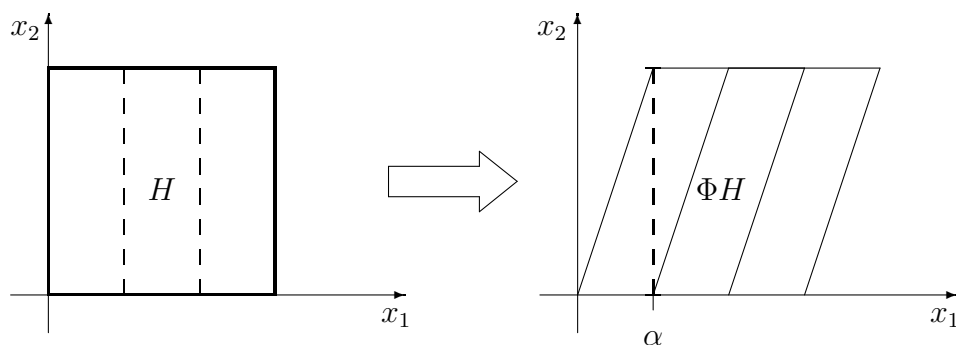


(e) *Scherung* $\mathbf{v} = 0$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

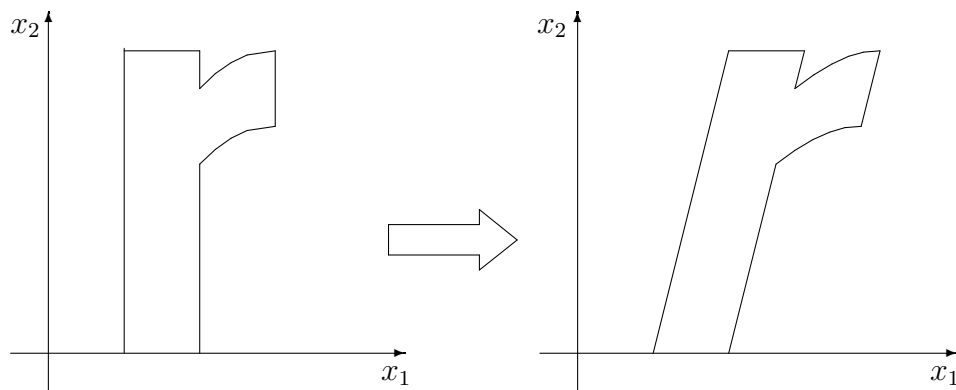
(1.9) Beispiel (a) Für $n = 2$ ist $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\alpha > 0$, und ein rechteckiges Gebiet von Punkten unterliegt einer Scherung nach rechts.

Abb. 1.9 Scherung eines rechteckigen Gebietes $H \subseteq \mathbb{E}^2$



(b) Anschaulich kann man den Effekt unter Verwendung von Zeichenfonts (Zeichensatz-design) zeigen. Aus einem Text mit vertikalen Zeichen macht man einfach kursive.

Abb. 1.10 Kursivschrift “ $\mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r}$ “ als Scherung in \mathbb{E}^2



(1.10) Bemerkung (a) Jede reelle Matrix A lässt sich schreiben als $A = QDS$ mit einer Drehmatrix Q , einer Diagonalmatrix D und einer Schermatrix S .

(b) Jede affine Abbildung $\mathbf{x} \rightarrow A\mathbf{x} + \mathbf{v}$ kann man zusammensetzen aus Translation, Scherung, Skalierung und Drehung.

1.4 Typen von Flächen- bzw. Kurvendarstellungen

Wir erläutern verschiedene Arten zur Darstellung von Kurven und Flächen.

(a) Darstellung als Funktionen

Skalarwertige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit dem Parametergebiet=Intervall $\Omega \subseteq \mathbb{R}$.

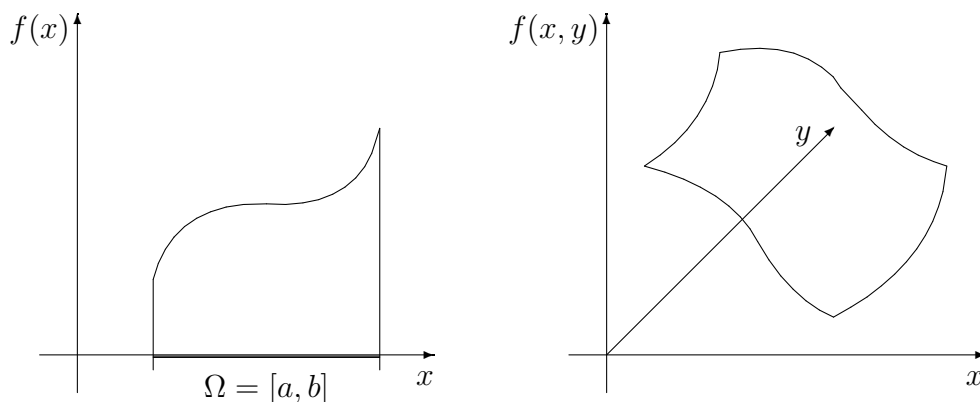
Kurve $\mathcal{K} = \{(x, f(x))^T \in \mathbb{R}^2 : x \in \Omega\} \subset \mathbb{E}^2$.

Skalarwertige Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit dem Parametergebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$.

Fläche $\mathcal{F} = \{(x, y, f(x, y))^T \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{E}^3$.

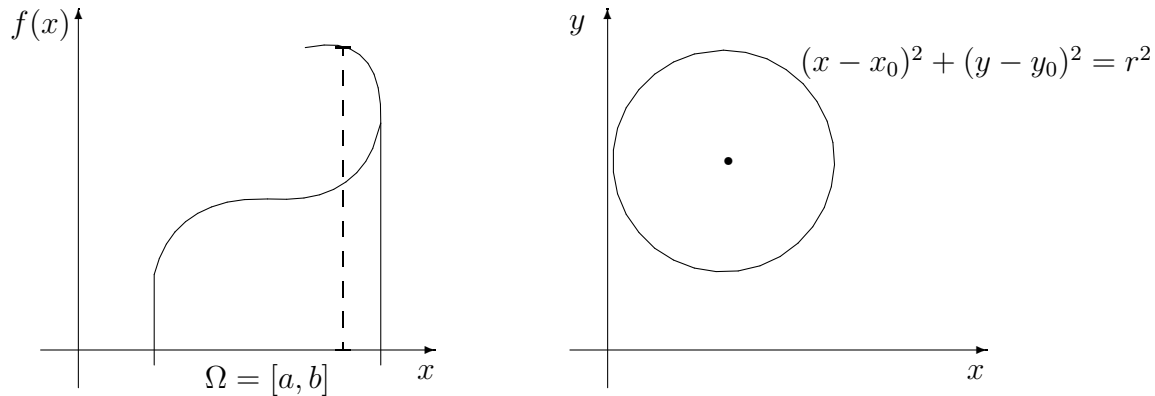
Hier bedeutet $(x, f(x))^T \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(x, y, f(x, y))^T \in \mathbb{R}^3$ nur, dass die einzelnen Komponenten reellwertig sind.

Abb. 1.11 Kurven und Flächen



Diese Art der Beschreibung stellt eine große Einschränkung an die Topologie der Fläche dar. Zum Beispiel sind damit keine geschlossenen Kurven oder Flächen darstellbar. Dies hängt auch mit der Eindeutigkeit der Abbildung zusammen.

Abb. 1.12 Implizit darstellbare Kurven



(b) Parametrische Darstellung

Vektorwertige Abbildung

$$\mathbf{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{E}^n, \quad n = 2, 3, \quad u \rightarrow \mathbf{x}(u) = (x_1(u), \dots, x_n(u))^T$$

mit dem *Parametergebiet* $\Omega \subseteq \mathbb{E}$ oder $\Omega \subseteq \mathbb{E}^2$.

(1.11) Beispiel (a) Parabelgleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= (t, ct^2)^T, \\ \mathbf{x}(t) &= (\pm ct^2, t)^T \quad \text{mit } \Omega = [0, T], \quad c > 0. \end{aligned}$$

(b) Kreisgleichung bzw. Kreisring

$$\mathbf{x}(r, \varphi) = (x_0 + r \cos \varphi, y_0 + r \sin \varphi)^T$$

mit $\Omega = [r_i, r_a] \times [0, 2\pi)$,

(c) Einheitskreis

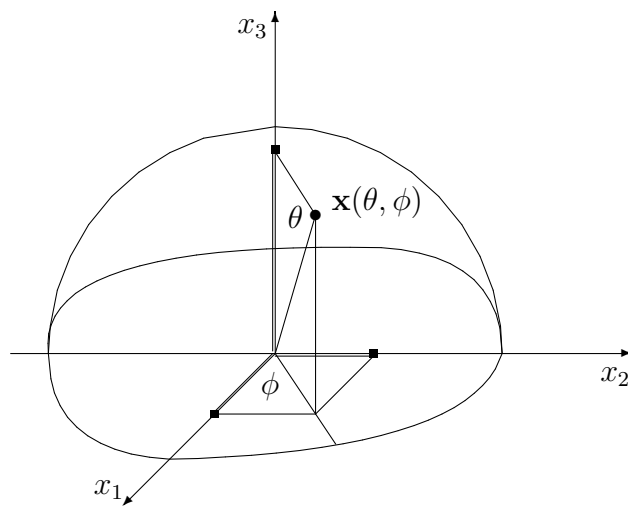
$$\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t)^T = (1, 0)^T \cos t + (0, 1)^T \sin t$$

mit $\mathbf{x} : \Omega \rightarrow \mathbb{E}^2$, $\Omega = [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{E}$.

(d) Kugeloberfläche (Einheitssphäre)

$$\mathbf{x}(\theta, \phi) = (\cos \theta \cos \phi, \cos \theta \sin \phi, \sin \theta)^T$$

mit $\Omega = [-\pi/2, \pi/2] \times [0, 2\pi) \subseteq \mathbb{E}^2$.

Abb. 1.13 Halbkugel mit Punkt auf der Sphäre**Anforderungen an Abbildung $\mathbf{x}(u)$**

- Darstellung soll möglichst unabhängig von einem Koordinatensystem sein.
- Freiheitsgrade in der Darstellung sollen geometrische Signifikanz haben.
- Änderungen in den Koeffizienten sollen Werte in einem vorhersehbaren Wertebereich liefern.

(c) Beschreibung mit Hilfe von Ansatzfunktionen

$$\mathbf{x}(u) = \sum_{j=0}^n \mathbf{c}_j B_j(u), \quad \mathbf{c}_j \in \mathbb{E}^d, \quad d = 2, 3, \quad B_j : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = 0, \dots, n,$$

mit den *Ansatzfunktionen* $B_j(u)$ und den *Kontrollkoeffizienten* \mathbf{c}_j .

Anforderungen an $B_j(u)$

- Affine Invarianz, d. h. für affine Transformationen Φ gilt

$$\mathbf{x} = \sum_{j=0}^n B_j \mathbf{c}_j \implies \Phi \mathbf{x} = \sum_{j=0}^n B_j \Phi \mathbf{c}_j.$$

Dies ist wegen

$$\begin{aligned} \Phi \mathbf{x} &= \sum_{j=0}^n B_j \Phi \mathbf{c}_j \\ \Phi \mathbf{x}(u) &= \sum_{j=0}^n B_j(u) \cdot \Phi \mathbf{c}_j \\ A \mathbf{x}(u) + \mathbf{v} &= \sum_{j=0}^n B_j(u) (A \mathbf{c}_j + \mathbf{v}) \\ \sum_{j=0}^n B_j(u) \cdot A \mathbf{c}_j + \mathbf{v} &\stackrel{!}{=} \sum_{j=0}^n B_j(u) \cdot A \mathbf{c}_j + \mathbf{v} \sum_{j=0}^n B_j(u) \end{aligned}$$

genau dann erfüllt, wenn $B_j(u)$, $j = 0, \dots, n$, eine Zerlegung der Eins bilden. Somit muss gelten

$$\sum_{j=0}^n B_j(u) \equiv 1.$$

– Geometrische Signifikanz: $\mathbf{x}(u)$ soll in der konvexen Hülle $H = [\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_n]$ liegen. Dies gilt für eine Zerlegung der Eins mit $B_j(u)$, wenn zusätzlich für alle $u \in \Omega$ die Bedingung $B_j(u) \geq 0$ erfüllt ist.

(d) Implizite Darstellung

Fläche als Nullstellenmenge einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n : f(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Häufig wird f als Polynom in $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ gewählt, also als Funktion der Form

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{0 \leq |i| \leq k} a_i \mathbf{x}^i$$

mit dem Multiindex $i = (i_1, \dots, i_n)^T \in \mathbb{N}^n$, dem Betrag $|i| = i_1 + \dots + i_n$ und der Potenz

$$\mathbf{x}^i = \prod_{l=1}^n x_l^{i_l}.$$

(1.12) Beispiel Für $n = 3$ und $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2$ ist \mathcal{F} eine Kugeloberfläche. Darstellung von $f(x_1, x_2, x_3)$ in der Polynomform mit Multiindex bei $k = 2$ (Notation von i als (i_1, i_2, i_3)).

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &= \sum_{0 \leq |i| \leq 2} a_i \mathbf{x}^i \\ &= a_{(000)} + a_{(100)} \mathbf{x}^{(100)} + a_{(010)} \mathbf{x}^{(010)} + a_{(001)} \mathbf{x}^{(001)} + a_{(110)} \mathbf{x}^{(110)} + a_{(101)} \mathbf{x}^{(101)} \\ &\quad + a_{(011)} \mathbf{x}^{(011)} + a_{(200)} \mathbf{x}^{(200)} + a_{(020)} \mathbf{x}^{(020)} + a_{(002)} \mathbf{x}^{(002)} \\ &= a_{(000)} + a_{(100)} x_1 + a_{(010)} x_2 + a_{(001)} x_3 + a_{(110)} x_1 x_2 + a_{(101)} x_1 x_3 + a_{(011)} x_2 x_3 \\ &\quad + a_{(200)} x_1^2 + a_{(020)} x_2^2 + a_{(002)} x_3^2 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{(000)} &= -R^2, \\ a_{(100)} &= a_{(010)} = a_{(001)} = a_{(110)} = a_{(101)} = a_{(011)} = 0, \quad a_{(200)} = a_{(020)} = a_{(002)} = 1. \end{aligned}$$

(1.13) Übung Zählen Sie im Fall $n = 3$ einige Flächen auf, welche sich implizit mittels Polynomen ersten bzw. zweiten Grades darstellen lassen. Hinweis: Kegelschnitte.

2 Bézier-Kurven

2.1 Parametrische Kurven

Betrachten wir die parametrische Darstellung einer Kurve in \mathbb{E}^3

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))^T$$

mit dem *Zeitparameter* $t \in \Omega = [a, b] = [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{E}$. Hieraus ergibt sich die Kurve als Punktmenge

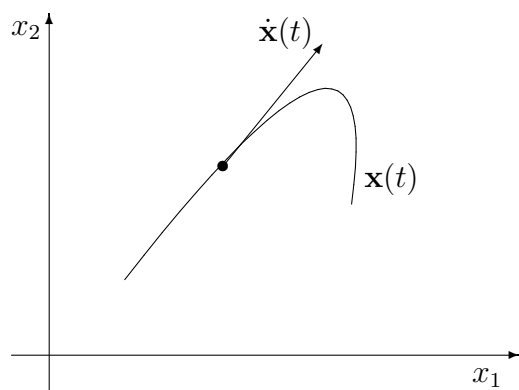
$$\mathcal{K} = \{\mathbf{x}(t) : t \in [a, b]\}.$$

(2.1) Definition Die Darstellung $\mathbf{x}(t)$ von \mathcal{K} heißt *regulär*, falls \mathbf{x} stetig differenzierbar ist und falls für alle $t \in [a, b]$ gilt

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dot{x}_3(t))^T \neq 0.$$

Der Vektor $\dot{\mathbf{x}}(t)$ bezeichnet die Tangente an die Kurve im Punkt $\mathbf{x}(t)$. Anschaulich bedeutet das die Geschwindigkeit beim Durchlaufen der Kurve.

Abb. 2.1 Parametrische Kurve im \mathbb{E}^2 mit Tangente



(2.2) Bemerkung Parameterdarstellungen von Kurven sind nicht eindeutig.

Ist $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$ eine bijektive Abbildung (eindeutig sowie “von“ und “auf“), so ist mit $\mathbf{x}(t)$, $t \in [a, b]$, auch $\tilde{\mathbf{x}}(\theta) := \mathbf{x}(t(\theta))$, $\theta \in [c, d]$, eine Parameterdarstellung derselben Kurve.

Zwischen den Geschwindigkeitsvektoren besteht im Fall stetig differenzierbarer Funktionen nach der Kettenregel der Zusammenhang

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(\theta) = \frac{d}{d\theta} \tilde{\mathbf{x}}(\theta) = \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \frac{dt}{d\theta},$$

d. h. die Geschwindigkeit ändert sich um den Faktor $dt/d\theta$.

(2.3) Beispiel Eine kanonische Art der Parametrisierung einer Kurve ist die *Parametrisierung über die Bogenlänge*: Ist $\mathbf{x}(t)$ eine reguläre Parameterdarstellung einer Kurve, so beschreibt

$$s = s(t) = \int_a^t \|\dot{\mathbf{x}}(\tau)\|_2 \, d\tau$$

die Länge der Kurve zwischen $\mathbf{x}(a)$ und $\mathbf{x}(t)$, d. h. die *Bogenlänge* der Kurve. Dabei verwenden wir mit $\|\cdot\|_2$ die euklidische Norm

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

(2.4) Übung Gegeben sei die Parameterdarstellung der Schraubenlinie

$$\mathbf{x}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)^T, \quad t \in [0, 2\pi].$$

- Skizzieren Sie die zugehörige Kurve \mathcal{K} und zeigen Sie, dass $\mathbf{x}(t)$ regulär ist.
- Bestimmen Sie zu \mathcal{K} eine weitere reguläre und eine nichtreguläre Parameterdarstellung. Hinweis: Untersuchen Sie z. B. die Bereichstransformationen $t = \alpha u$, $t = u^2$.
- Parametrisieren Sie die Kurve über die Bogenlänge $s = s(t) = 2\sqrt{t}$. Beobachten Sie hierbei, dass die Bogenlänge von der ursprünglichen Parametrisierung unabhängig ist.

(2.5) Bemerkung Unterschiedliche Darstellungsformen von Kurven

(a) *Monome* $1, t, t^2, \dots, t^n$ als Ansatzfunktionen in

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{a}_0 + \mathbf{a}_1 t + \dots + \mathbf{a}_n t^n.$$

Nachteile

- Die Koeffizienten \mathbf{a}_i haben keine geometrische Signifikanz.
- Die affine Invarianz ist nicht erfüllt, denn

$$\sum_{i=0}^n B_i(t) = \sum_{i=0}^n t^i \neq 1.$$

(b) *Lagrange-Interpolationspolynom*

Zu gegebenen Knoten (t_i, \mathbf{x}_i) definiert man dieses als

$$L_n(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{x}_i \varphi_i(t),$$

mit den *Lagrange-Knotenpolynomen* (*Lagrange-Terme*)

$$\varphi_i(t) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{t - t_j}{t_i - t_j}.$$

Es gilt zwar $\sum_{i=0}^n \varphi_i(t) = 1$, aber wegen $\varphi_i(t) \not\equiv 0$ ist die affine Invarianz nicht gegeben.

(2.6) Beispiel Lagrange-Interpolation

1. Referenz mit 4 Punkten aus \mathbb{E} ($n = 3$) auf dem Intervall $[-2, 4]$.

t_i	-2	1	2	4
\mathbf{x}_i	3	1	-3	8

Abb. 2.2 Lagrange-Basispolynome $\varphi_i(t)$, $i = 0, 1, 2, 3$, auf $[-2, 4]$

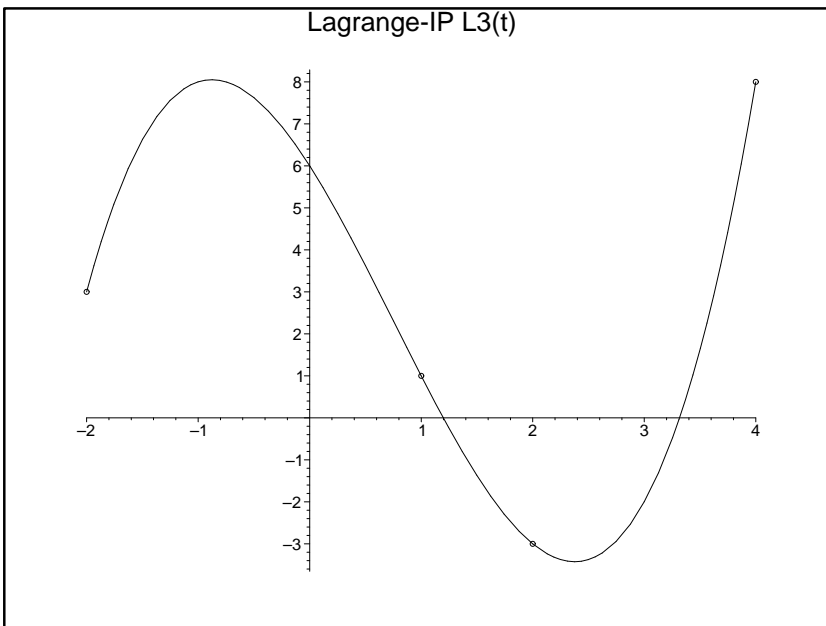
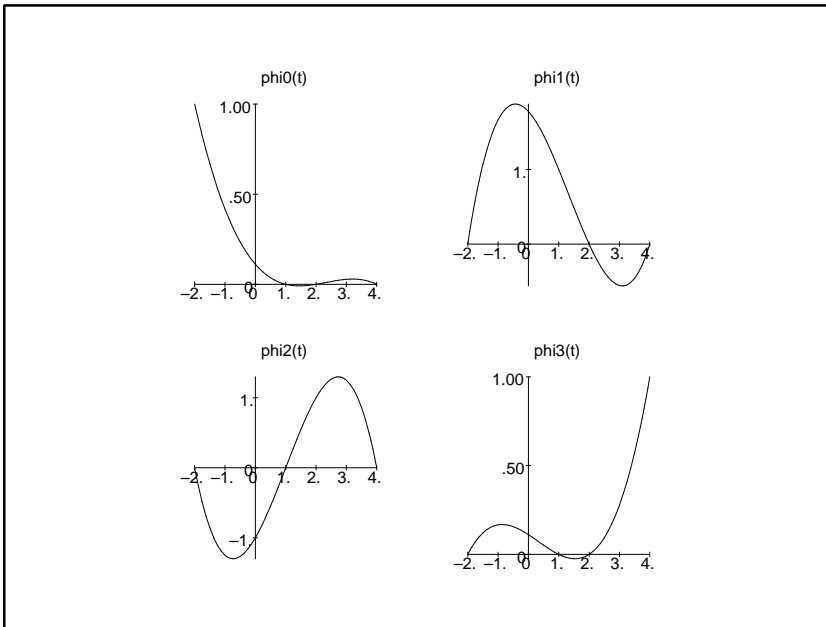


Abb. 2.3 Lagrange-Interpolationspolynom

$$L_3(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{x}_i \varphi_i(t) = \frac{2}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 - \frac{25}{6}t + 6$$

2. Referenz mit 4 Punkten aus \mathbb{E} ($n = 3$) auf dem Intervall $[-2, 4]$.

t_i	-2	1	2	4
\mathbf{x}_i	-2	1	2	4

Das Lagrange-Interpolationspolynom lautet

$$L_3(t) = \sum_{i=0}^3 \mathbf{x}_i \varphi_i(t) = t.$$

Im Fall $\mathbf{x}_i = c = \text{const}$ erhalten wir $L_3(t) \equiv c$.

(c) *Bézier-Darstellung*

Hier dienen die *Bernstein-Polynome* als Ansatzfunktionen. Affine Invarianz und geometrische Signifikanz sind erfüllt. Nicht erfüllt ist dagegen z. B. die Interpolationseigenschaft der Lagrange-Darstellung.

2.2 Bernstein-Polynome

(2.7) Definition Für $n = 0, 1, 2, \dots$ heißen die Polynome

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}, \quad j = 0, \dots, n,$$

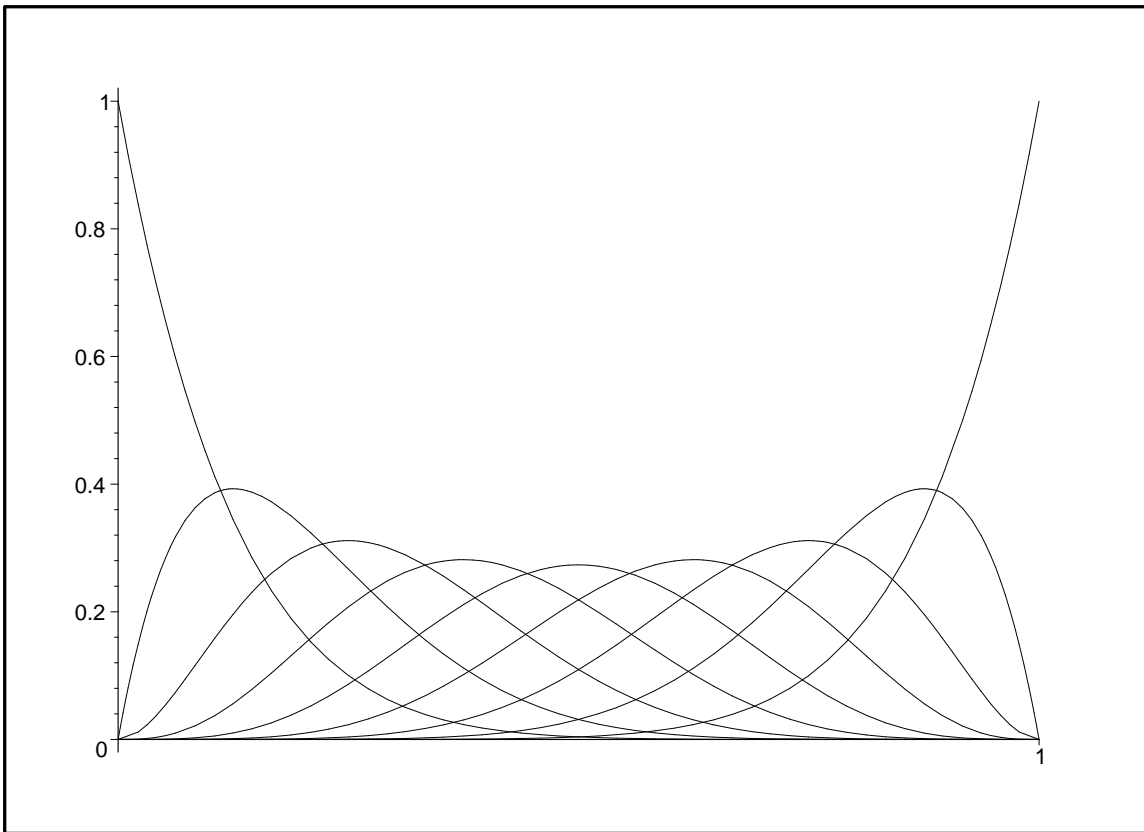
auf dem Intervall $[0, 1]$ *Bernstein-Polynome*.

(2.8) Beispiel (a) Bernstein-Polynome bei $n = 4$

$$\begin{aligned} B_0^4(t) &= (1-t)^4 = 1 - 4t + 6t^2 - 4t^3 + t^4, \\ B_1^4(t) &= 4t(1-t)^3 = 4t - 12t^2 + 12t^3 - 4t^4, \\ B_2^4(t) &= 6t^2(1-t)^2 = 6t^2 - 12t^3 + 6t^4, \\ B_3^4(t) &= 4t^3(1-t) = 4t^3 - 4t^4, \\ B_4^4(t) &= t^4. \end{aligned}$$

(b) Bernstein-Polynome bei $n = 8$ unter Beachtung der Symmetrieeigenschaft

$$\begin{aligned} B_0^8(t) &= (1-t)^8 = B_8^8(1-t), \\ B_1^8(t) &= 8t(1-t)^7 = B_7^8(1-t), \\ B_2^8(t) &= 28t^2(1-t)^6 = B_6^8(1-t), \\ B_3^8(t) &= 56t^3(1-t)^5 = B_5^8(1-t), \\ B_4^8(t) &= 70t^4(1-t)^4. \end{aligned}$$

Abb. 2.4 Bernstein-Polynome $B_j^n(t)$, $j = 0, 1, \dots, n = 8$, $t \in [0, 1]$ 

Somit kann man die Bernstein-Polynome in der Monombasis $\{t^i\}$ ausdrücken.

$$\begin{aligned}
 B_j^n(t) &= \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\
 &= \binom{n}{j} t^j \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n-j}{k} 1^{n-j-k} (-t)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-j} \binom{n}{j} \binom{n-j}{k} (-1)^k t^{j+k}, \quad j+k=i \\
 &= \sum_{i=j}^n \binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} (-1)^{i-j} t^i \\
 &= \sum_{i=j}^n \binom{n}{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} t^i,
 \end{aligned}$$

wobei die Beziehung

$$\binom{n}{j} \binom{n-j}{i-j} = \binom{n}{i} \binom{i}{j}$$

einfach nachzurechnen ist.

(2.9) Ausgewählte Eigenschaften der Bernstein-Polynome

(a) $B_j^n(t)$, $j = 0, \dots, n$, ist eine Basis des Raums \mathcal{P}_n aller Polynome bis zum Grad n . Somit lässt sich jedes Polynom höchstens n -ten Grades eindeutig als Linearkombination der $B_j^n(t)$ schreiben.

(b) Für $t \in [0, 1]$ ist $B_j^n(t) \geq 0$.

Die $B_j^n(t)$ bilden eine Zerlegung der Eins, d.h.

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) \equiv 1.$$

(c) $B_j^n(t)$ hat in $[0, 1]$ genau ein Maximum. Dieses liegt bei $t = j/n$.

(d) Es gilt die Symmetrieeigenschaft

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t).$$

(e) Es gilt die Rekursionsformel

$$B_j^n(t) = tB_{j-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_j^{n-1}(t) \quad \text{für } j = 0, 1, \dots, n, \quad n \geq 1,$$

$$B_0^0(t) = 1, \quad B_1^0(t) = 0, \quad B_{-1}^n(t) = 0, \quad \text{und } t \in \mathbb{R}.$$

(f) Unterteilung

$$B_j^n(ct) = \sum_{i=0}^n B_j^i(c) B_i^n(t).$$

(g) Gradanhebungsformeln

$$(1-t)B_j^n(t) = \frac{n+1-j}{n+1} B_j^{n+1}(t), \quad tB_j^n(t) = \frac{j+1}{n+1} B_{j+1}^{n+1}(t) \quad \text{sowie Summe beider.}$$

Beweisskizzen zu einigen Eigenschaften

Zu (a): Zu zeigen ist nur, dass sich jedes Monom t^i , $i = 0, \dots, n$, als Linearkombination der $B_j^n(t)$ schreiben lässt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der Bernstein-Basis $\{B_j^n(t)\}$.

Es gilt

$$\begin{aligned} t^i &= t^i \cdot 1 = t^i (t + (1-t))^{n-i} \\ &= t^i \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} t^{n-i-j} (1-t)^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-i} \left[\binom{n-i}{j} / \binom{n}{n-j} \right] \binom{n}{n-j} t^{n-j} (1-t)^j, \quad \binom{n}{n-j} = \binom{n}{j} \\ &= \sum_{j=0}^n c_{ij} B_{n-j}^n(t) \end{aligned}$$

mit

$$c_{ij} = \begin{cases} \binom{n-i}{j} / \binom{n}{j} & \text{für } j \leq n-i, \\ 0 & \text{für } j > n-i. \end{cases}$$

Tab. 2.1 Koeffizienten c_{ij} , $i, j = 0, \dots, n = 1, 2, \dots, 5$

i	j		
	0	1	
0	1	1	$1 = B_1^1(t) + B_0^1(t)$
1	1	0	$t^1 = B_1^1(t)$

i	j			
	0	1	2	
0	1	1	1	$1 = \sum_{j=0}^2 B_{2-j}^2(t)$
1	1	$\frac{1}{2}$	0	
2	1	0	0	$t^2 = B_2^2(t)$

i	j				
	0	1	2	3	
0	1	1	1	1	$1 = \sum_{j=0}^3 B_{3-j}^3(t)$
1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	
2	1	$\frac{1}{3}$	0	0	
3	1	0	0	0	$t^3 = B_3^3(t)$

i	j					
	0	1	2	3	4	
0	1	1	1	1	1	$1 = \sum_{j=0}^4 B_{4-j}^4(t)$
1	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	
2	1	$\frac{2}{4} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$	0	0	
3	1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	
4	1	0	0	0	0	$t^4 = B_4^4(t)$

i	j						
	0	1	2	3	4	5	
0	1	1	1	1	1	1	$1 = \sum_{j=0}^5 B_{5-j}^5(t)$
1	1	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	
2	1	$\frac{3}{5} = \frac{12}{20}$	$\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$	$\frac{2}{20} = \frac{1}{10}$	0	0	
3	1	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{20}$	0	0	0	
4	1	$\frac{1}{5}$	0	0	0	0	
5	1	0	0	0	0	0	$t^5 = B_5^5(t)$

Es gilt $c_{ij} = c_{ji}$.

Man kann die Potenz t^i auch in einer zweiten Gestalt darstellen.

$$\begin{aligned}
 t^i &= t^i \cdot 1 = t^i ((1-t) + t)^{n-i} \\
 &= t^i \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (1-t)^{n-i-k} t^k \\
 &= \sum_{k=0}^{n-i} \binom{n-i}{k} (1-t)^{n-i-k} t^{k+i}, \quad k+i=j \\
 &= \sum_{j=i}^n \binom{n-i}{j-i} (1-t)^{n-j} t^j \\
 &= \sum_{j=i}^n \left[\binom{n-i}{j-i} / \binom{n}{j} \right] \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\
 &= \sum_{j=i}^n d_{ij} B_j^n(t),
 \end{aligned}$$

wobei $d_{ij} = \binom{n-i}{j-i} / \binom{n}{j} = \binom{j}{i} / \binom{n}{i}$, $j = i, \dots, n$, gilt.

Zu (b):
$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} = ((1-t) + t)^n = 1^n = 1.$$

Zu (c): 1. Fall $0 < j < n$:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (t^j (1-t)^{n-j}) &= t^{j-1} (1-t)^{n-j-1} [j(1-t) - (n-j)t] \\
 &= t^{j-1} (1-t)^{n-j-1} (j - nt) \\
 &= 0 \quad \text{genau dann, wenn } t = j/n.
 \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\frac{d^2}{dt^2} (t^j (1-t)^{n-j}) \Big|_{t=j/n} = -n t^{j-1} (1-t)^{n-j-1} \Big|_{t=j/n} < 0,$$

was die hinreichende Bedingung für das Maximum bedeutet.

2. Fall $j = 0$ oder $j = n$

$$B_0^n(t) = (1-t)^n, \quad B_n^n(t) = t^n \Rightarrow B_0^n(0) = B_n^n(1) = 1 \text{ und Maximumstellen } 0 \text{ bzw. } 1.$$

Zu (d):

$$\begin{aligned}
 B_k^n(s) &= \binom{n}{k} s^k (1-s)^{n-k}, \\
 B_{n-j}^n(1-t) &= \binom{n}{n-j} (1-t)^{n-j} (1-(1-t))^{n-(n-j)} \\
 &= \binom{n}{n-j} t^j (1-t)^{n-j} = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\
 &= B_j^n(t).
 \end{aligned}$$

Zu (e): Die Aussage folgt unmittelbar aus

$$\binom{n}{i} = \binom{n-1}{i} + \binom{n-1}{i-1}, \quad n \geq 1, \quad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

□

(2.10) Bemerkung Ist $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so heißt

$$B_n f(t) = \sum_{j=0}^n f\left(\frac{j}{n}\right) B_j^n(t)$$

das n -te Bernstein-Polynom von $f(t)$. Es gilt

$$\|B_n f - f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |B_n f(t) - f(t)| \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

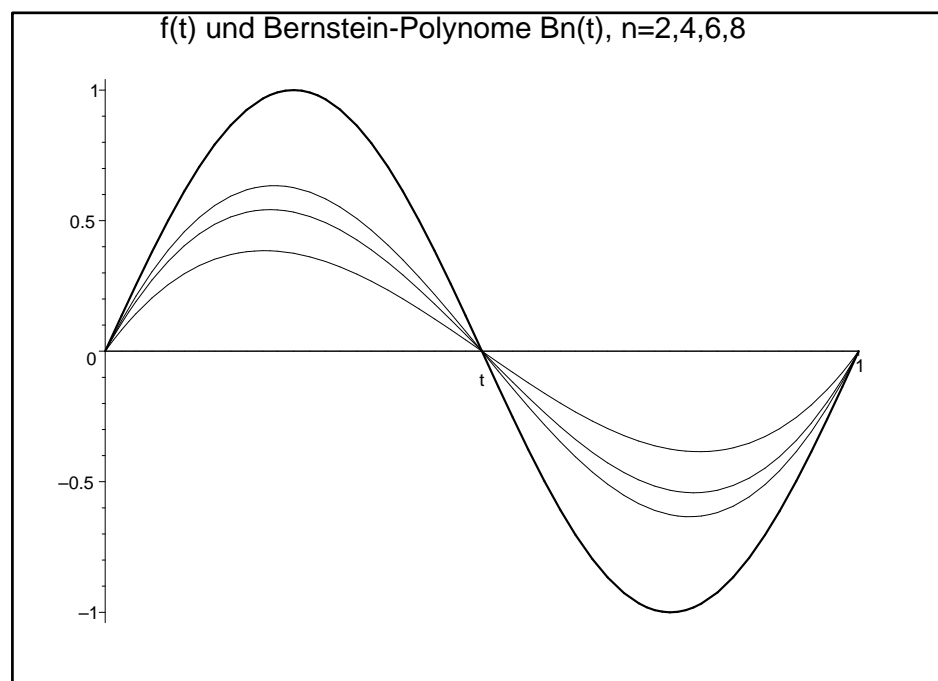
Damit lässt sich jede stetige Funktion auf einfache Weise beliebig genau durch Bernstein-Polynome approximieren (\Rightarrow Weierstraßscher Approximationssatz).

(2.11) Beispiel Sei $f(t) = \sin(2\pi t)$, $t \in [0, 1]$.

Betrachten wir für $n = 2, 4, 6, 8$ die Bernstein-Polynome von $f(t)$ gemäß

$$B_n f(t) = \sum_{j=0}^n f\left(\frac{j}{n}\right) B_j^n(t), \quad t_j = j/n, \quad (t_j, f(t_j)), \quad j = 0, \dots, n.$$

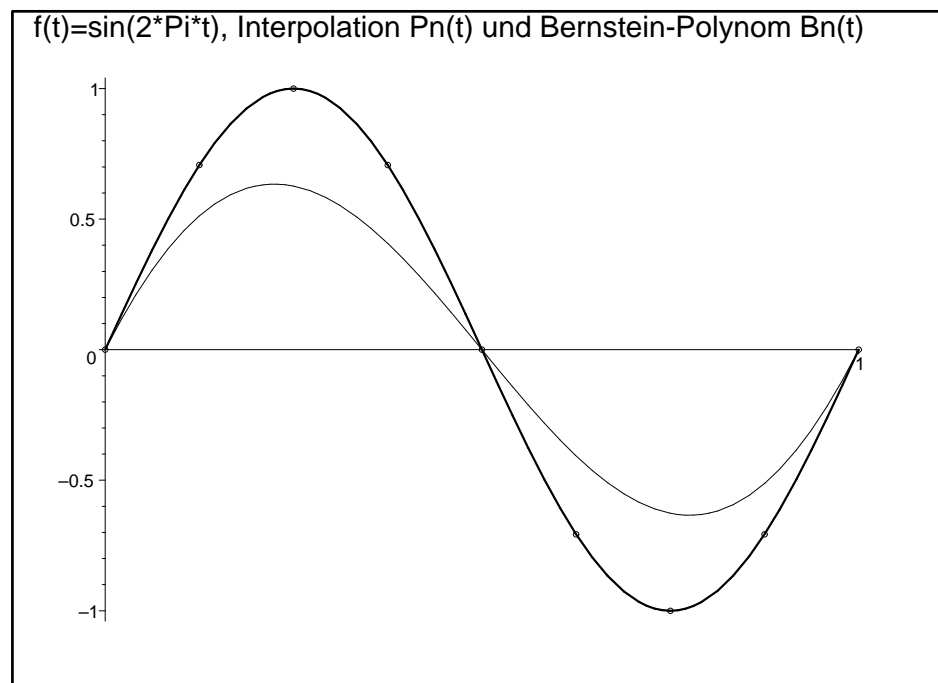
Abb. 2.5 Bernstein-Polynome $B_n f(t)$, $n = 2, 4, 6, 8$, mit wachsender Genauigkeit



Die Bernstein-Polynome $B_n f(t)$ sind n -ten Grades. Da aber die Ausgangsfunktion ungerade ist, wird bei n gerade der effektive Grad von $B_n f(t)$ um Eins kleiner sein.

$$\begin{aligned}
B_2 f(t) &= 0, \\
B_4 f(t) &= 4t(1-t)^3 - 4t^3(1-t) = 8t^3 - 12t^2 + 4t = 8t(t-1/2)(t-1), \\
B_6 f(t) &= 3\sqrt{3}t(1-t)^5 + 7.5\sqrt{3}t^2(1-t)^4 - 7.5\sqrt{3}t^4(1-t)^2 - 3\sqrt{3}t^5(1-t) \\
&= -3\sqrt{3}t^5 + 7.5\sqrt{3}t^4 - 7.5\sqrt{3}t^2 + 3\sqrt{3}t \\
&= -3\sqrt{3}(t+1)t(t-1/2)(t-1)(t-2), \\
B_8 f(t) &= 4\sqrt{2}t(1-t)^7 + 28t^2(1-t)^6 + 28\sqrt{2}t^3(1-t)^5 \\
&\quad - 28\sqrt{2}t^5(1-t)^3 - 28t^6(1-t)^2 - 4\sqrt{2}t^7(1-t) \\
&= (-112 + 80\sqrt{2})t^7 + (392 - 280\sqrt{2})t^6 + (-560 + 392\sqrt{2})t^5 \\
&\quad + (420 - 280\sqrt{2})t^4 + (-168 + 112\sqrt{2})t^3 + (28 - 28\sqrt{2})t^2 + 4\sqrt{2}t \\
&= 4(5\sqrt{2} - 7)(t-2-\sqrt{2})(2t-2-\sqrt{2})(t+1+\sqrt{2})(2t+\sqrt{2})t(t-1/2)(t-1).
\end{aligned}$$

Abb. 2.6 $f(t)$ mit Interpolationspolynom $L_n(t)$ und Bernstein-Polynom $B_n f(t)$, $n = 8$



Das Interpolationspolynom $L_8(t)$ mit der Referenz $(t_j, f(t_j))$, $j = 0, \dots, n = 8$, ist effektiv vom Grad 7 und kann grafisch kaum von $f(t)$ unterschieden werden.

$$\begin{aligned}
L_8(t) &= \left(\frac{262144}{63}\sqrt{2} - \frac{262144}{45} \right) t^7 + \left(\frac{917504}{45} - \frac{131072}{9}\sqrt{2} \right) t^6 \\
&\quad + \left(\frac{905216}{45}\sqrt{2} - \frac{253952}{9} \right) t^5 + \left(\frac{176128}{9} - \frac{124928}{9}\sqrt{2} \right) t^4 \\
&\quad + \left(\frac{44800}{9}\sqrt{2} - \frac{318016}{45} \right) t^3 + \left(\frac{55136}{45} - \frac{7808}{9}\sqrt{2} \right) t^2 \\
&\quad + \left(\frac{6016}{105}\sqrt{2} - \frac{224}{3} \right) t.
\end{aligned}$$

2.3 Bézier-Darstellungen von Kurven

(2.12) Definition Gegeben seien $n+1$ Kontrollpunkte $\mathbf{b}_i \in \mathbb{E}^d$, $d = 2, 3$, $i = 0, \dots, n$. Das Polynom

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}$$

heißt die durch die Punkte \mathbf{b}_j erzeugte Bézier-Kurve, Bézier-Polynom oder Bézier-Funktion.

(2.13) Eigenschaften

(a) Die Bézier-Kurve hat bei $n+1$ Kontrollpunkten maximal den Grad n .

(b) *Invarianz unter affinen Parametertransformationen*

Soll eine Bézier-Kurve anstatt über dem Intervall $[0, 1]$ über einem anderen Intervall $[a, b]$ abgebildet werden, so folgt mit der affinen Transformation $t = (u - a)/(b - a)$ die Darstellung

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right).$$

(c) *Endpunkt-Interpolationseigenschaft*

Es ist $\mathbf{P}(0) = \mathbf{b}_0$ und $\mathbf{P}(1) = \mathbf{b}_n$.

Der Nachweis durch elementares Nachrechnen. Es ist $B_j^n(0) = \delta_{j,0}$ und $B_j^n(1) = \delta_{j,n}$.

(d) *Konvexe-Hülle-Eigenschaft*

Jeder Punkt $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, liegt in der konvexen Hülle $H = [\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n]$.

Dies ist klar, da $B_j^n(t)$, $j = 0, \dots, n$, eine Zerlegung der Eins bilden und außerdem gilt $B_j^n(t) \geq 0$ für $t \in [0, 1]$ (vgl. Abschnitt 1.4 (c)).

(e) *Reproduktion von Geradenstücken*

Liegen $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ auf einer Geraden, so liegt die Bézier-Kurve auf dem diese Punkte verbindenden Geradenstück. Man nennt dies auch *lineare Präzision*.

Beweis Übung.

(f) *Symmetrie*

Es gilt mit $j = n - k$

$$\sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) = \sum_{k=n}^0 \mathbf{b}_{n-k} B_{n-k}^n(t) = \sum_{k=n}^0 \mathbf{b}_{n-k} B_k^n(1-t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{n-j} B_j^n(1-t).$$

Dies ist also eine unmittelbare Folge der Symmetrieeigenschaft von $B_j^n(t)$.

(2.14) Bemerkung Wird einer der Kontrollpunkte \mathbf{b}_j geändert, so ändert sich in der Bézier-Darstellung lediglich der zugehörige j -te Summand. Da $B_j^n(t)$ in $t = j/n$ das Maximum hat, wirkt sich die Änderung am stärksten in einer kleinen Umgebung von $t = j/n$, also lokal aus.

(2.15) Beispiel Illustration zu Bézier-Kurven

(a) Bei 2 Kontrollpunkten ($n = 1$) ist das Polynom

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^1 \mathbf{b}_j B_j^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1$$

und somit die Bézier-Kurve die die Punkte \mathbf{b}_0 und \mathbf{b}_1 verbindende Strecke.

Sie fällt mit der konvexen Hülle der beiden Punkte zusammen und stellt natürlich auch eine baryzentrische Kombination dar.

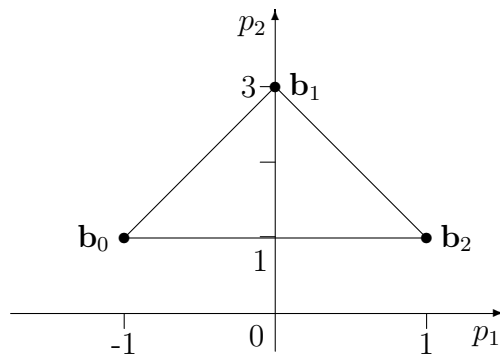
(b) Gegeben seien die 3 Kontrollpunkte ($n = 2$) in \mathbb{E}^2

$$\mathbf{b}_0 = (-1, 1)^T, \quad \mathbf{b}_1 = (0, 3)^T, \quad \mathbf{b}_2 = (1, 1)^T.$$

Das Interpolationspolynom höchstens 2. Grades durch diese Punkte als Referenz $\{(x_j, y_j), j = 0, 1, 2\}$ ist $L_2(x) = 3 - 2x^2$.

Die Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t) = (p_1(t), p_2(t))^T$ zu den drei Punkten liegt in ihrer konvexen Hülle (Dreieck).

Abb. 2.7 Kontrollpunkte \mathbf{b}_j , $j = 0, 1, 2$, und ihre konvexe Hülle



Man kann die Bézier-Kurve nun schrittweise und punktweise konstruieren.

Sei t ein beliebiger Wert aus $[0,1]$. Dann liegt der Punkt

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1$$

auf der Strecke $\overline{\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1}$, analog der Punkt

$$\mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2$$

auf der Strecke $\overline{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2}$. Nimmt man nun die baryzentrische Kombination

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t),$$

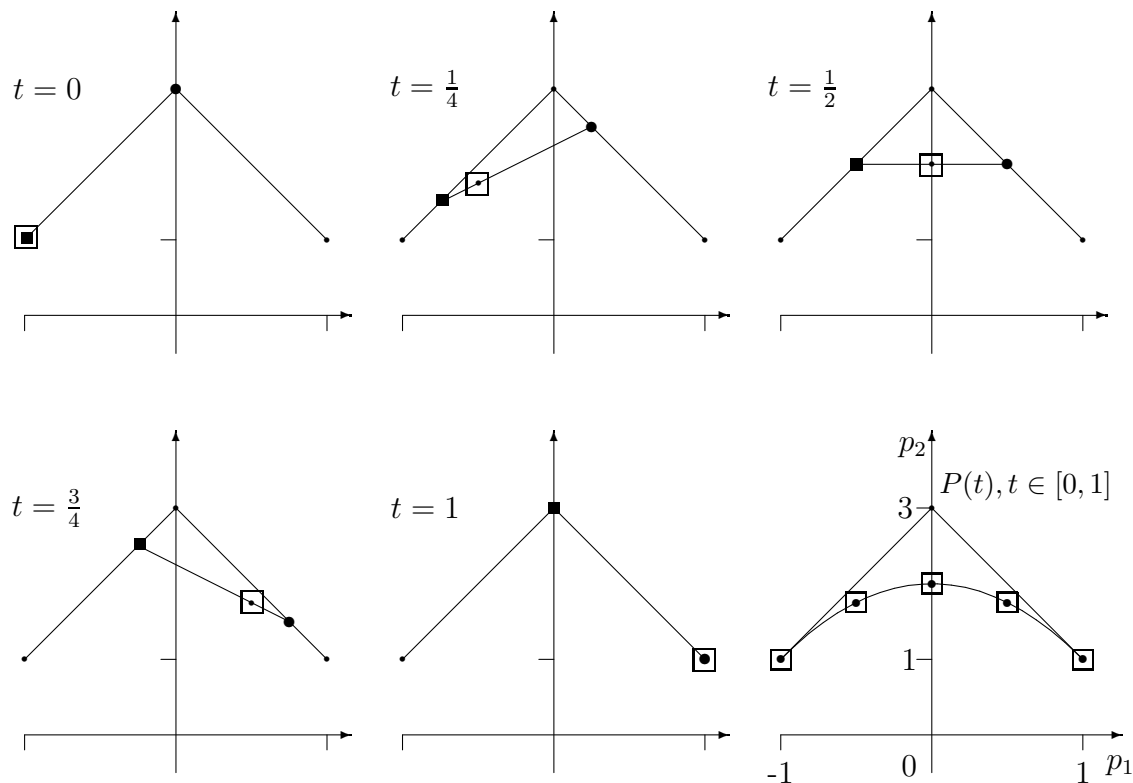
so erhält man den entsprechenden Punkt der Bézier-Kurve.

Die Größen $\mathbf{b}_0^1(t)$ und $\mathbf{b}_1^1(t)$ sind zugleich parametrische Geradengleichungen, und $\mathbf{b}_0^2(t)$ stellt ein Polynom 2. Grades in Parameterform dar. Nach Einsetzen folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^1(t) &= (t-1, 2t+1)^T, \\ \mathbf{b}_1^1(t) &= (t, -2t+3)^T, \\ \mathbf{P}(t) = \mathbf{b}_0^2(t) &= (2t-1, -(2t-1)^2+2)^T. \end{aligned}$$

Abb. 2.8 Konstruktion einiger Punkte der Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t) = \mathbf{b}_0^2(t)$

Zwischenpunkte: $\mathbf{b}_0^1(t)$ ■ $\mathbf{b}_1^1(t)$ • $\mathbf{b}_0^2(t)$ □



Kontrolle von Punkten auf der Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t) = (p_1(t), p_2(t))^T = \mathbf{b}_0^2(t)$

t	0	$\frac{1}{2}$	1
$p_1(t)$	-1	0	1
$p_2(t)$	1	2	1

Es folgt noch der Nachweis einer allgemeinen Beziehung $\mathbf{P}(t) = \mathbf{b}_0^n(t)$ bei $n+1$ Punkten.

Darstellung der Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ als Funktion $y = f(x)$ mittels der Transformation $x = 2t - 1$, $x \in [-1, 1]$.

$$\mathbf{P}(t) = \begin{pmatrix} 2t - 1 \\ -(2t - 1)^2 + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -x^2 + 2 \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{P}}(x),$$

$$y = f(x) = -x^2 + 2.$$

Wir bemerken noch, dass der Anstieg $f'(x) = -2x$ der Bézier-Kurve an den Endpunkten $f'(-1) = 2$ und $f'(1) = -2$ beträgt sowie im Zusammenhang steht mit der ersten und letzten Kontrollpunktsteigung $\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0$ bzw. $\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1$.

Wir betrachten später auch Ableitungen von Bézier-Kurven.

Eine besonders anschauliche Form der Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t) = (p_1(t), p_2(t), p_3(t), \dots)^T$ erhält man, wenn in den Kontrollpunkten die ersten Komponenten eine Folge von äquidistanten Werten aus dem Intervall $[0, 1]$ bilden.

Wir notieren dies als $\mathbf{b}_{j,1} = t_j = j/n$, $j = 0, 1, \dots, n$. Diese ersten Punktkoordinaten führen dann zur ersten Bézier-Koordinatenfunktion $p_1(t) = t$.

Arbeiten wir im Punktraum \mathbb{E}^2 und werden die 2. Komponenten der Kontrollpunkte durch eine Funktion $f(t)$ generiert, also $\mathbf{b}_{j,2} = f(t_j)$, $j = 0, 1, \dots, n$, dann ist die Bézier-Kurve

$$\mathbf{P}(t) = (p_1(t), p_2(t))^T = (t, p_2(t))^T = (x, p_2(x))^T$$

wie eine Funktionsdarstellung im (x, y) -Koordinatensystem.

Aber gerade diese Vorgehensweise ist die Grundlage für die Konstruktion der n -ten Bernstein-Polynome $B_n f(t)$ einer Funktion gewesen (vgl. Bemerkung (2.10)). Damit gilt $p_2(t) \equiv B_n f(t)$.

(2.16) Beispiel Sei $f(t) = \sin(2\pi t)$, $t \in [0, 1]$.

Im Beispiel (2.11) haben wir für $n = 2, 4, 6, 8$ die Bernstein-Polynome $B_n f(t)$ von $f(t)$ und ihre Konvergenz untersucht.

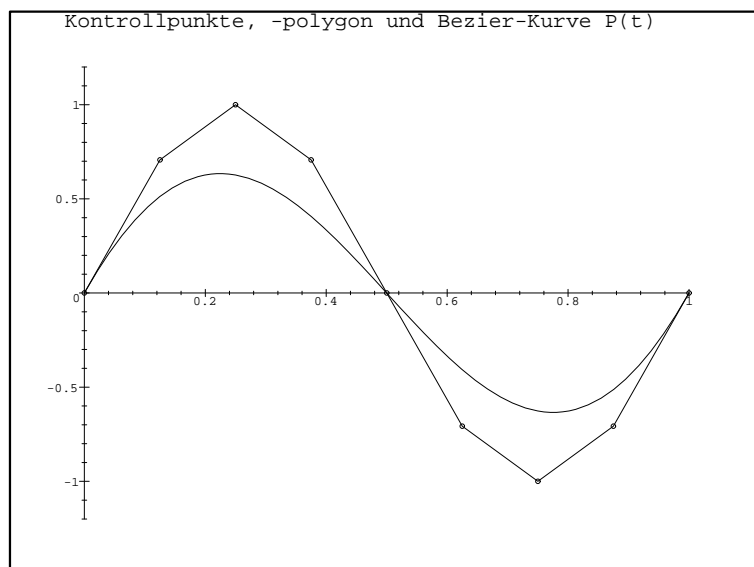
Sei $n = 8$. Wir berechnen nun die Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ zu den Kontrollpunkten

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_j &= (t_j, f(t_j))^T, \quad t_j = j/n, \quad j = 0, \dots, n = 8, \\ \{t_j\} &= \{j/8\}, \\ \{f(t_j)\} &= \{0, 0.5\sqrt{2}, 1, 0.5\sqrt{2}, 0, -0.5\sqrt{2}, -1, -0.5\sqrt{2}, 0\}. \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist

$$\mathbf{P}(t) = (t, B_8 f(t))^T \quad \text{mit } B_8 f(t) \text{ aus Beispiel (2.11).}$$

Abb. 2.9 Kontrollpolygon mit $f(t_j) = \sin(2\pi j/n)$, $j = 0, \dots, n = 8$, und zugehörige Bézier-Kurve



In Bemerkung (2.10) haben wir die Approximationseigenschaft der n -ten Bernstein-Polynome von $f(t)$ formuliert.

Analog ist zu erwarten, dass bei durch Funktionen gegebene Kontrollpunkte die zugehörigen Bézier-Kurven $\mathbf{P}_n(t)$ mit wachsender Anzahl n dieser Punkte (durch die Funktionen bestimmt!) immer “besser“ werden, also

$$\|\mathbf{P}_n f - f\| \geq \|\mathbf{P}_{n+1} f - f\| \geq \|\mathbf{P}_{n+2} f - f\| \geq \dots$$

Erfolgt die Hinzunahme von neuen Kontrollpunkten auf den Funktionen gemäß gewissen Regeln, d.h. werden die Kontrollpolygone immer feiner und damit genauer, so gilt sogar

$$\|\mathbf{P}_n f - f\| \longrightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

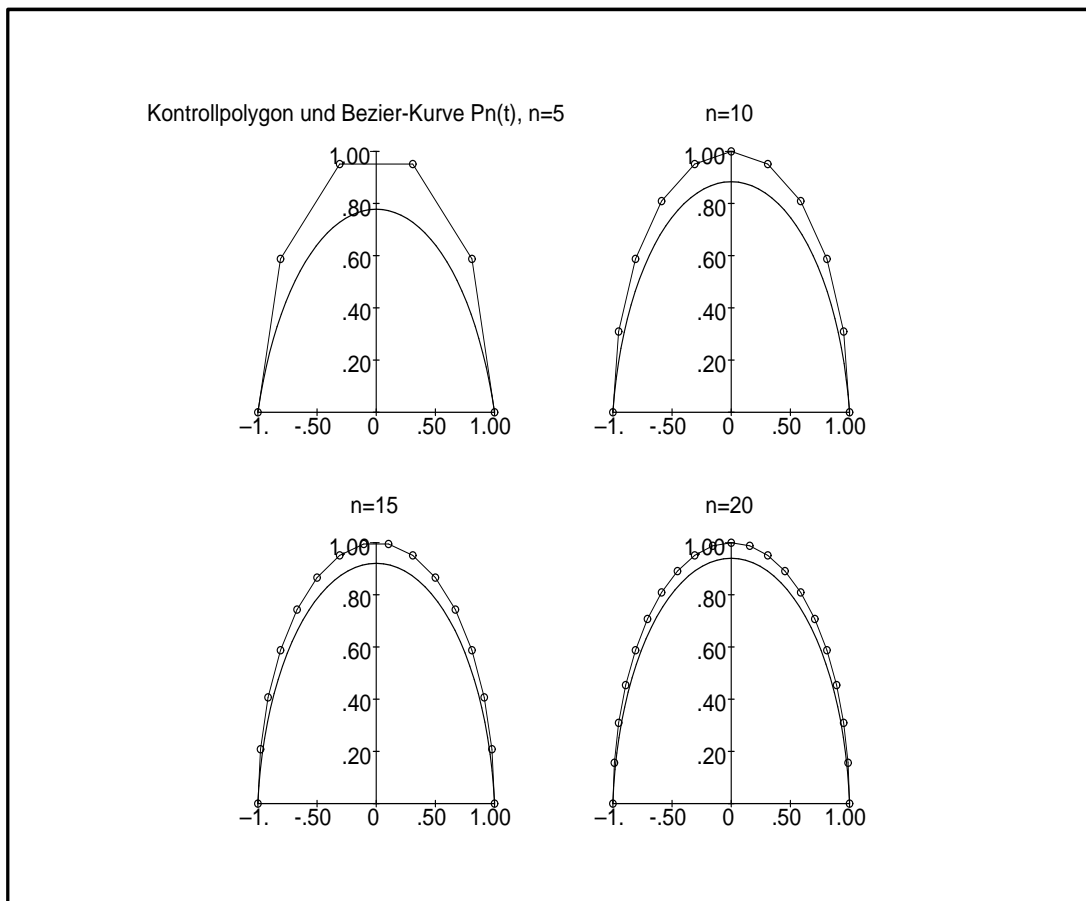
Diese Situation lässt sich grafisch gut nachvollziehen.

(2.17) Beispiel Zu den Kontrollpunkten

$$\mathbf{b}_j = (\cos(j\pi/n), \sin(j\pi/n))^T, \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

sind die Bézier-Kurven $\mathbf{P}_n(t)$ für wachsende Werte von n darzustellen.

Abb. 2.10 Kontrollpolygone zu $\{\mathbf{b}_j\}_{j=0}^n$, $n = 5, 10, 15, 20$, und zugehörige Bézier-Kurven



2.4 Ableitungen von Bézier-Kurven

Wir bilden die erste Ableitung einer Bézier-Kurve.

Hierzu bemerken wir, dass für die Bernstein-Polynome $B_j^n(t)$, $0 < j < n$, gilt

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} B_j^n(t) &= \frac{d}{dt} \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \\
 &= \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} t^{j-1} (1-t)^{n-j} - \frac{n!}{j!(n-j-1)!} t^j (1-t)^{n-j-1} \\
 &= n \left(\frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-(j-1))!} t^{j-1} (1-t)^{n-1-(j-1)} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{(n-1)!}{j!(n-1-j)!} t^j (1-t)^{n-1-j} \right) \\
 &= n (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)).
 \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\frac{d}{dt} B_0^n(t) = -n B_0^{n-1}(t) \quad \text{und} \quad \frac{d}{dt} B_n^n(t) = n B_{n-1}^{n-1}(t).$$

Es folgt für die Ableitung der Bézier-Kurve

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{P}}(t) &= \frac{d}{dt} \mathbf{P}(t) = n \sum_{j=1}^{n-1} \mathbf{b}_j (B_{j-1}^{n-1}(t) - B_j^{n-1}(t)) - \mathbf{b}_0 n B_0^{n-1}(t) + n \mathbf{b}_n B_{n-1}^{n-1}(t) \\
 &= n \sum_{j=1}^n \mathbf{b}_j B_{j-1}^{n-1}(t) - n \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t) \\
 &= n \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{b}_{j+1} B_j^{n-1}(t) - n \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t) \\
 &= n \sum_{j=0}^{n-1} (\mathbf{b}_{j+1} - \mathbf{b}_j) B_j^{n-1}(t) \\
 &= n \sum_{j=0}^{n-1} \Delta^1 \mathbf{b}_j B_j^{n-1}(t), \quad \Delta^1 \mathbf{b}_j \in \mathbb{R}^d.
 \end{aligned}$$

Ganz analog beweist man für die zweite Ableitung

$$\frac{d^2}{dt^2} \mathbf{P}(t) = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} (\Delta^1 \mathbf{b}_{j+1} - \Delta^1 \mathbf{b}_j) B_j^{n-2}(t) = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \Delta^2 \mathbf{b}_j B_j^{n-2}(t).$$

Höhere Ableitungen können ebenso durch Induktion berechnet werden.

Wir fassen zusammen.

(2.18) Satz Die k -te Ableitung ($0 \leq k \leq n$) der Bézier-Kurve

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t)$$

ist gegeben durch

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{P}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} \Delta^k \mathbf{b}_j B_j^{n-k}(t).$$

Hierbei ist $\Delta^k \mathbf{b}_j$ die k -te iterierte Vorwärtsdifferenz, rekursiv definiert durch

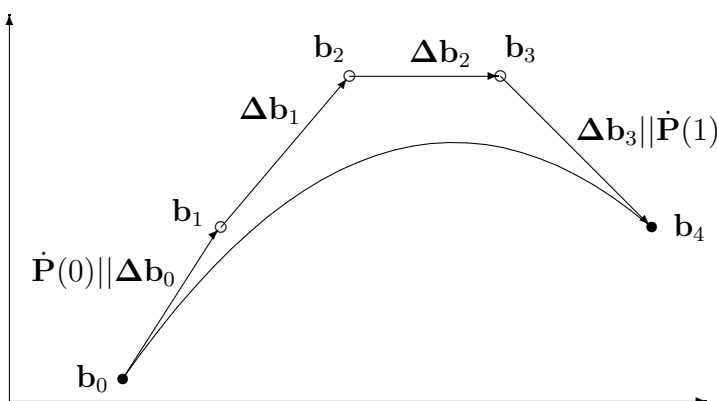
$$\begin{aligned} \Delta^0 \mathbf{b}_j &= \mathbf{b}_j, \\ \Delta^k \mathbf{b}_j &= \Delta^{k-1} \mathbf{b}_{j+1} - \Delta^{k-1} \mathbf{b}_j, \quad k \geq 1, \quad \Delta^1 = \Delta. \end{aligned}$$

(2.19) Bemerkung (a) Wegen $B_j^{n-1}(0) = \delta_{j,0}$ und $B_j^{n-1}(1) = \delta_{j,n-1}$ folgt aus der Formel für die erste Ableitung in den Endpunkten

$$\dot{\mathbf{P}}(0) = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \quad \dot{\mathbf{P}}(1) = n(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}).$$

Die Tangente von $\mathbf{P}(t)$ zeigt in den Endpunkten also in Richtung der entsprechenden Differenzvektoren, vorausgesetzt die Punkte sind verschieden. Fallen die Punkte zusammen, wird der nächste Nachbarpunkt einbezogen.

Abb. 2.11 Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ mit 5 Kontrollpunkten \mathbf{b}_j , $j = 0, \dots, 4$, Endpunkteigenschaft $\mathbf{P}(0) = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{P}(1) = \mathbf{b}_4$, Differenzen (Vektoren) $\Delta \mathbf{b}_j$ und Ableitungseigenschaft an den Endpunkten



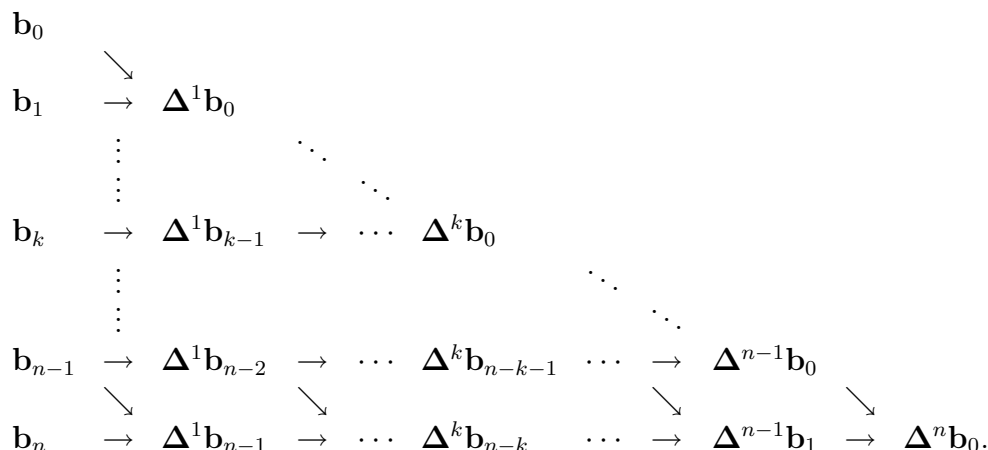
(b) Wichtige Spezialfälle sind

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{P}(0) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{b}_0, \quad \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{P}(1) = \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{b}_{n-k}.$$

Dies zeigt, dass die k -te Ableitung einer Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ an einem Endpunkt nur von den dem Endpunkt am nächsten liegenden k Kontrollpunkten abhängt.

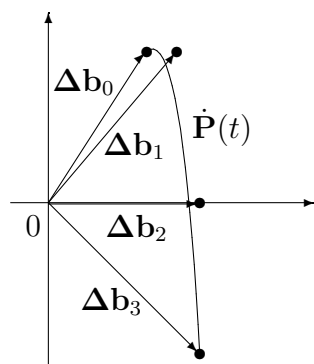
Für $k = 0$ erhalten wir die schon erwähnte Eigenschaft der Endpunktinterpolation, für $k = 1$ die Bemerkung (2.19) (a).

(c) Die Vorwärtsdifferenzen lassen sich durch folgendes Schema bestimmen.



(d) Die Ableitungskurve ist eine Linearkombination von Vektoren. Um daraus eine Bézier-Kurve zu machen, definiert man die Kontrollpunkte $\mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_j$, $j = 0, \dots, n-1$. Hierbei kann \mathbf{a} beliebig gewählt werden, sinnvoll ist z. B. $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Die Ableitungskurve wird manchmal *Hodograph* genannt. Sie ändert sich nicht, wenn auf die Originalkurve eine Translation angewendet wird.

Abb. 2.12 Ableitungskurve $\dot{\mathbf{P}}(t)$ mit 4 Kontrollpunkten $\mathbf{a} + \Delta \mathbf{b}_j$, $j = 0, \dots, 3$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, Punkte \mathbf{b}_j aus Abb. 2.11



(2.20) Übung (a) Berechnen Sie für $k = 1, 2, 3$ explizit die k -te iterierte Vorwärtsdifferenz. Zeigen Sie mittels Induktion, dass allgemein gilt

$$\Delta^k \mathbf{b}_i = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \mathbf{b}_{i+j}.$$

(b) Benutzen Sie die Taylor-Reihenentwicklung einer Funktion um den Punkt $t = 0$, um Folgendes zu zeigen.

Die Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ lässt sich mit Hilfe der Vorwärtsdifferenzen darstellen in der Form

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^j \mathbf{b}_0 t^j.$$

Das entspricht der Normalform eines Polynoms $\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^n a_{n-j} t^j$ mit den die Vorwärtsdifferenzen einbeziehenden Koeffizienten $a_{n-j} = \binom{n}{j} \Delta^j \mathbf{b}_0$.

2.5 Weierstraßscher Approximationssatz

Bezeichnen wir mit \mathcal{P}_n den $(n + 1)$ -dimensionalen Vektorraum aller Polynome vom Höchstgrad n über dem Körper \mathbb{R} ,

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p \in \mathcal{C}(-\infty, +\infty) : p(t) = \sum_{i=0}^n a_i t^{n-i}, a_i \in \mathbb{R} \right\}.$$

(2.21) Satz

Gegeben sei eine beliebige stetige Funktion $f \in \mathcal{C}[a, b]$, $-\infty < a < b < +\infty$. Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Polynom $p \in \mathcal{P}_n$, so dass $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ ist.

Beweis

Da jedes Intervall $[a, b]$ linear auf $[0, 1]$ transformiert werden kann, beschränken wir uns auf den Fall $[a, b] = [0, 1]$.

Wir zeigen, dass die Folge der Bernstein-Polynome von $f(t)$, also

$$B_n f(t) = \sum_{j=0}^n f\left(\frac{j}{n}\right) B_j^n(t), \quad n = 1, 2, \dots,$$

auf $[0, 1]$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Damit gilt die Approximationseigenschaft auch für Polynome in Normalform.

Wir beachten einige Eigenschaften der Bernstein-Polynome n -ten Grades

$$B_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j},$$

u.a. die Zerlegung der Eins

$$1 = (t + (1-t))^n = \sum_{j=0}^n B_j^n(t),$$

und die Endpunkteigenschaften $B_j^n(0) = \delta_{j0}$, $B_j^n(1) = \delta_{jn}$.

Man bemerkt somit, dass

$$B_n f(0) = f(0), \quad B_n f(1) = f(1) \quad \forall n \text{ ist.}$$

Daraus folgt für alle $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} f(t) - B_n f(t) &= f(t) \sum_{j=0}^n B_j^n(t) - \sum_{j=0}^n f\left(\frac{j}{n}\right) B_j^n(t) \\ &= \sum_{j=0}^n \left[f(t) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right] B_j^n(t), \\ |f(t) - B_n f(t)| &\leq \sum_{j=0}^n \left| f(t) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j^n(t). \end{aligned}$$

Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von f gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ einen von t unabhängigen Wert δ , so dass $|f(t) - f(\frac{j}{n})| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle Teilpunkte gilt, die $|t - \frac{j}{n}| < \delta$ erfüllen.

Für jedes $t \in [0, 1]$ lassen sich die Mengen

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &= \{j \in \{0, 1, \dots, n\} : |t - j/n| < \delta\} \quad \text{und} \\ \mathcal{M}_2 &= \{j \in \{0, 1, \dots, n\} : |t - j/n| \geq \delta\}\end{aligned}$$

bilden. Damit zerlegt man die Summe

$$\sum_{j=0}^n = \sum_{j \in \mathcal{M}_1} + \sum_{j \in \mathcal{M}_2},$$

deren Teilsummen wir nun einzeln abschätzen.

$$(a) \quad \sum_{j \in \mathcal{M}_1}$$

$$\sum_{j \in \mathcal{M}_1} \left| f(t) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j^n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j \in \mathcal{M}_1} B_j^n(t) \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{j=0}^n B_j^n(t) = \frac{\varepsilon}{2}.$$

$$(b) \quad \sum_{j \in \mathcal{M}_2}$$

Mit $M = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)|$ und $\frac{|t - j/n|}{\delta} \geq 1$ gilt weiter

$$\begin{aligned}\sum_{j \in \mathcal{M}_2} \left| f(t) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j^n(t) &\leq \sum_{j \in \mathcal{M}_2} \left| f(t) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right| B_j^n(t) \frac{(t - j/n)^2}{\delta^2} \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{j \in \mathcal{M}_2} B_j^n(t) (t - j/n)^2 \\ &\leq \frac{2M}{\delta^2} \sum_{j=0}^n B_j^n(t) (t - j/n)^2 \\ &= \frac{2M}{\delta^2} \sum_{j=0}^n B_j^n(t) [t^2 - 2tj/n + (j/n)^2] \\ &= \frac{2M}{\delta^2} \left[\underbrace{t^2 \sum_{j=0}^n B_j^n(t)}_{=1} - 2t \underbrace{\sum_{j=0}^n B_j^n(t) j/n}_{=t, \text{ lineare Präz.}} + \underbrace{\sum_{j=0}^n B_j^n(t) (j/n)^2}_{=t^2 + t(1-t)/n} \right] \\ &= \frac{2M}{\delta^2} [t^2 - 2t \cdot t + t^2 + t(1-t)/n] \\ &= \frac{2M}{\delta^2} [t(1-t)/n] \\ &\leq \frac{2M}{4n\delta^2} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2},\end{aligned}$$

falls nur $n > M/(\delta^2 \varepsilon)$ gewählt wird.

Insgesamt ergibt sich damit die Abschätzung

$$|f(t) - B_n f(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

für alle $t \in [0, 1]$, so dass die gleichmäßige Konvergenz der Folge $B_n f$ gesichert ist.

Als Ergänzung sollen noch der 2. Anteil der Abschätzung (lineare Präzision)

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) j/n = t$$

sowie der 3. Anteil der Abschätzung

$$\sum_{j=0}^n B_j^n(t) (j/n)^2 = t^2 + t(1-t)/n$$

detailliert gezeigt werden.

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n B_j^n(t) j/n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \frac{j}{n}, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \\ &= t \sum_{j=1}^n \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-(j-1))!} t^{j-1} (1-t)^{n-1-(j-1)}, \quad j-1 = k \\ &= t \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} t^k (1-t)^{n-1-k} \\ &= t \sum_{k=0}^{n-1} B_k^{n-1}(t) \\ &= t \cdot 1 \\ &= t. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n B_j^n(t) (j/n)^2 &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \left(\frac{j}{n}\right)^2, \quad \binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!} \\ &= \frac{t}{n} \sum_{j=1}^n j \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-(j-1))!} t^{j-1} (1-t)^{n-1-(j-1)} \\ &= \frac{t}{n} \left[1 - 1 + \sum_{j=1}^n j \frac{(n-1)!}{(j-1)!(n-1-(j-1))!} t^{j-1} (1-t)^{n-1-(j-1)} \right] \\ &= \frac{t}{n} \left[1 - \sum_{j=0}^{n-1} B_j^{n-1}(t) + \sum_{j=1}^n j \binom{n-1}{j-1} t^{j-1} (1-t)^{n-1-(j-1)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{t}{n} \left[1 - \sum_{j=1}^n B_{j-1}^{n-1}(t) + \sum_{j=1}^n j \binom{n-1}{j-1} t^{j-1} (1-t)^{n-1-(j-1)} \right] \\
&= \frac{t}{n} \left[1 + \sum_{j=1}^n (j-1) \binom{n-1}{j-1} t^{j-1} (1-t)^{n-1-(j-1)} \right] \\
&= \frac{t}{n} \left[1 + t(n-1) \sum_{j=2}^n \binom{n-2}{j-2} t^{j-2} (1-t)^{n-2-(j-2)} \right] \\
&= \frac{t}{n} \left[1 + t(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} B_j^{n-2}(t) \right] \\
&= \frac{t}{n} [1 + t(n-1)] \\
&= t^2 + \frac{1}{n} t(1-t).
\end{aligned}$$

□

Die lineare Präzision ist auch für Kontrollpunkte auf einer Geraden gültig.

Seien $\mathbf{b}_j = (1 - \frac{j}{n})\mathbf{b}_0 + \frac{j}{n}\mathbf{b}_n$, $j = 0, 1, \dots, n$, und

$$g(t) = \mathbf{b}_0 + t(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_0), \quad t \in [0, 1],$$

die Gerade durch diese Punkte.

Die Bézier-Kurve dazu ist

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(t) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) \\
&= \sum_{j=0}^n [\mathbf{b}_0 + j/n (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_0)] B_j^n(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \sum_{j=0}^n B_j^n(t) + (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_0) \sum_{j=0}^n j/n B_j^n(t) \\
&= \mathbf{b}_0 \cdot 1 + (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_0) \cdot t \\
&= g(t).
\end{aligned}$$

Wegen der Konvexen-Hülle-Eigenschaft gilt das auch allgemein für die Kontrollpunkte

$$\mathbf{b}_j = (1 - t_j)\mathbf{b}_0 + t_j\mathbf{b}_n, \quad 0 = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n = 1.$$

3 Der Algorithmus von de Casteljau

3.1 Parametrisierung einer Parabel

Erinnern wir uns an die Rekursionseigenschaft der Bernstein-Polynome (vgl. (2.9) (e))

$$B_j^n(t) = tB_{j-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_j^{n-1}(t).$$

Der de Casteljau-Algorithmus stellt ein rekursives Verfahren dar zur Berechnung von Bézier-Kurven. Im Beispiel (2.15) (b) haben wir das schrittweise Vorgehen unter Verwendung von “Zwischenpolynomen“ schon angedeutet.

Gegeben seien die Kontrollpunkte $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{E}^3$.

Man setze

$$\mathbf{b}_i^0(t) \equiv \mathbf{b}_i, \quad i = 0, 1, 2,$$

und bilde Polynome höheren Grades durch die Rekursion

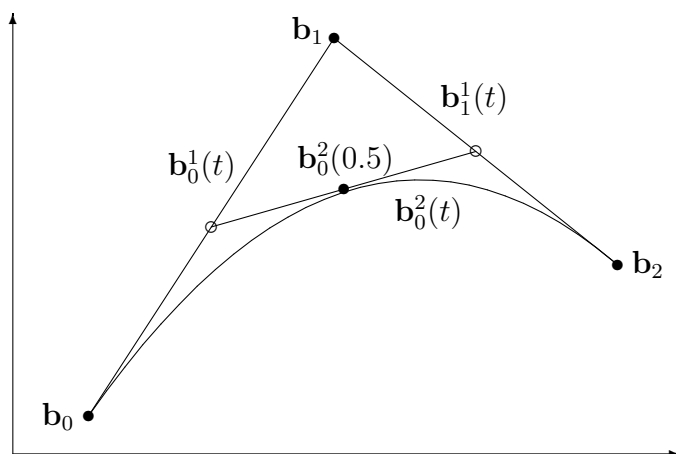
$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^1(t) &= (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1, \\ \mathbf{b}_1^1(t) &= (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2, \\ \mathbf{b}_0^2(t) &= (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t). \end{aligned}$$

Einsetzen ergibt das Polynom 2. Grades

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2(1-t)t\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2 = \sum_{j=0}^2 \mathbf{b}_j B_j^2(t).$$

Dies ist die Bézier-Kurve zu den Punkten $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$.

Abb. 3.1 Grafische Darstellung des rekursiven Polynomaufbaus mit Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t) = \mathbf{b}_0^2(t)$ bei 3 Kontrollpunkten $\mathbf{b}_j, j = 0, 1, 2$



3.2 De Casteljau's Algorithmus

Gegeben seien die Punkte $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{E}^3$.

Die zugehörige Bézier-Kurve ist

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t)$$

Der Algorithmus von de Casteljau erzeugt zu den Punkten eine Hierarchie von Polynomen nach folgendem Schema.

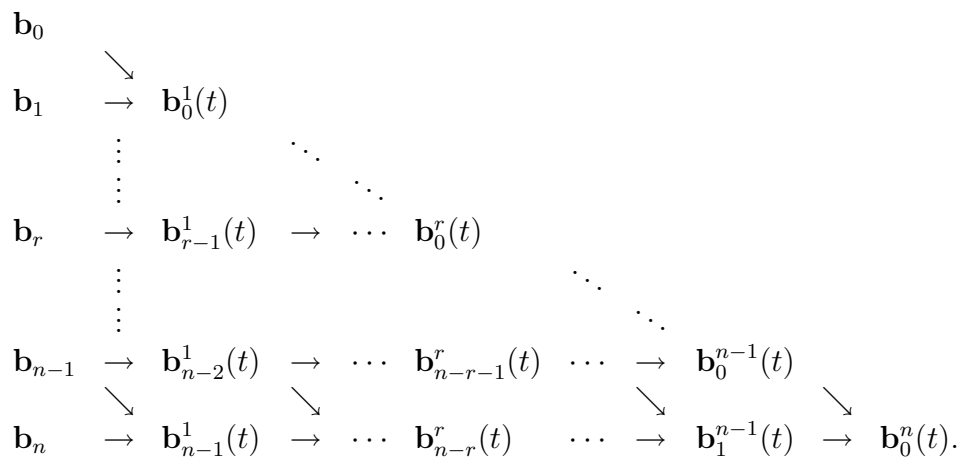
(3.1) Algorithmus von Casteljau

(a) Setze $\mathbf{b}_j^0(t) \equiv \mathbf{b}_j$, $j = 0, \dots, n$.

(b) Berechne für $r = 1, \dots, n$ und $j = 0, \dots, n - r$

$$\mathbf{b}_j^r(t) = (1 - t)\mathbf{b}_j^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{j+1}^{r-1}(t).$$

Wir erkennen hierin folgendes Aufbauschema.



Die Polynome $\mathbf{b}_{n-r}^r(t)$, $r < n$, werden auch *Subpolynome* genannt.

(3.2) Beispiel Gegeben seien die Punkte

$(t_0, x_0) = (0, 0)$, $(t_1, x_1) = (1, 1)$, $(t_2, x_2) = (3, 1)$ und $(t_3, x_3) = (4, 0)$.

Berechnen Sie das durch diese Punkte verlaufende Polynom höchsten 3. Grades.

Untersuche 3 Varianten der Ermittlung der Bézier-Kurve.

- Führe den Algorithmus von de Casteljau aus.
- Notiere das zugehörige Bézier-Polynom mittels Bernstein-Polynome.
- Notiere das zugehörige Bézier-Polynom mittels Vorwärtsdifferenzen.

Wie ändert sich die Bézier-Kurve, wenn der Wert x_2 geändert wird?

Das Interpolationspolynom von Lagrange höchstens 3. Grades hat die Gestalt

$$L_3(t) = -\frac{1}{3}t^2 + \frac{4}{3}t = \frac{1}{3}t(4 - t)$$

und ist effektiv vom Grad 2.

Berechnung des Bézier-Polynoms nach dem Algorithmus von de Casteljau mit

$$\mathbf{b}_j^r(t) = (1-t)\mathbf{b}_j^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{j+1}^{r-1}(t).$$

$$\begin{array}{lcl}
 \mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & \\
 \searrow & & \\
 \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \mathbf{b}_0^1(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} \\
 \searrow & & \searrow \\
 \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \mathbf{b}_1^1(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \mathbf{b}_0^2(t) = \begin{pmatrix} t^2+2t \\ -t^2+2t \end{pmatrix} \\
 \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} & \rightarrow & \mathbf{b}_2^1(t) = \begin{pmatrix} t+3 \\ -t+1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \mathbf{b}_1^2(t) = \begin{pmatrix} -t^2+4t+1 \\ -t^2+1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \mathbf{b}_0^3(t) = \begin{pmatrix} -2t^3+3t^2+3t \\ -3t^2+3t \end{pmatrix} \\
 & & & & & & \\
 & & & & & & \mathbf{b}_0^3(t) = \begin{pmatrix} -2t^3+3t^2+3t \\ -3t^2+3t \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Berechnung des Bézier-Polynoms mit Bernstein-Polynomen

$$\begin{aligned}
 B_j^n(t) &= \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j}, \quad n=3, \\
 B_0^3(t) &= (1-t)^3, \\
 B_1^3(t) &= 3t(1-t)^2, \\
 B_2^3(t) &= 3t^2(1-t), \\
 B_3^3(t) &= t^3.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(t) &= (p_1(t), p_2(t))^T = \sum_{j=0}^3 \mathbf{b}_j B_j^3(t) \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \cdot B_0^3(t) + 1 \cdot B_1^3(t) + 3 \cdot B_2^3(t) + 4 \cdot B_3^3(t) \\ 0 \cdot B_0^3(t) + 1 \cdot B_1^3(t) + 1 \cdot B_2^3(t) + 0 \cdot B_3^3(t) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -2t^3 + 3t^2 + 3t \\ -3t^2 + 3t \end{pmatrix} \\
 &= \mathbf{b}_0^3(t).
 \end{aligned}$$

Die Berechnung des Bézier-Polynoms erfolgt nun mittels Vorwärtsdifferenzen und Normalform

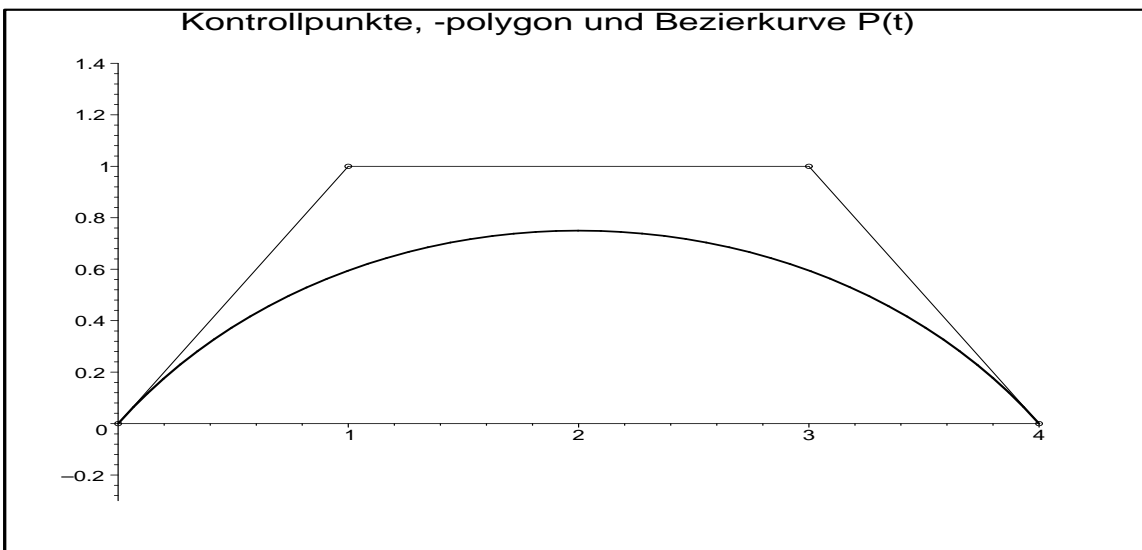
$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^j \mathbf{b}_0 t^j, \quad n=3.$$

Schema der Vorwärtsdifferenzen

$$\begin{array}{lclclcl}
 \mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & & & & & \\
 & \searrow & & & & \\
 \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \Delta^1 \mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \\
 & \searrow & & \searrow & & \\
 \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \Delta^1 \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} & \rightarrow & \Delta^2 \mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \\
 & \searrow & & \searrow & & \searrow \\
 \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} & \rightarrow & \Delta^1 \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \Delta^2 \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} & \rightarrow & \Delta^3 \mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}
 \end{array}$$

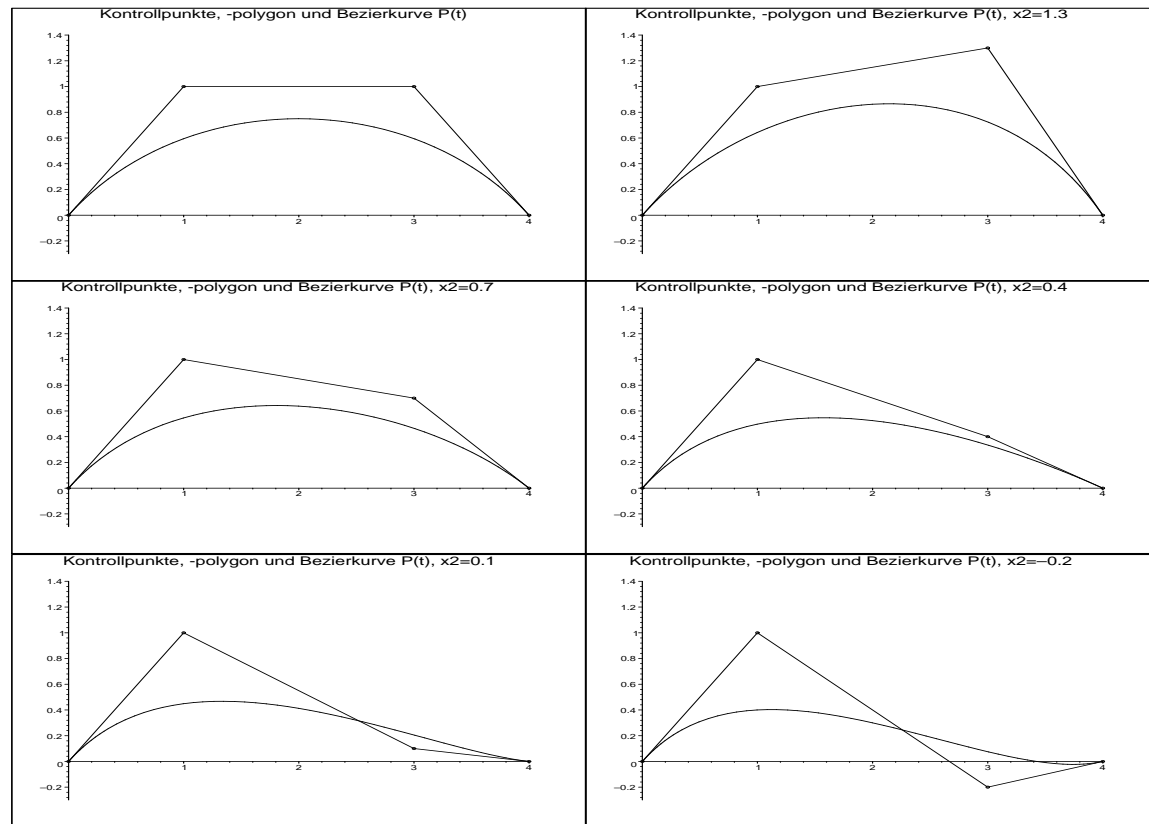
$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}(t) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta^0 \mathbf{b}_0 + \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta^1 \mathbf{b}_0 t^1 + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} \Delta^2 \mathbf{b}_0 t^2 + \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \Delta^3 \mathbf{b}_0 t^3 \\
 &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} t^2 + 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} t^3 \\
 &= \begin{pmatrix} -2t^3 + 3t^2 + 3t \\ -3t^2 + 3t \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Abb. 3.2 Kontrollpunkte mit Bézier-Kurve



Variation der Ordinate des 3. Kontrollpunktes $\mathbf{b}_2 = (t_2, x_2)^T = (3, 1)^T$ mit entsprechender Veränderung der Bézier-Kurve.

Sei $x_2 = 1, 1.3, 0.7, 0.4, 0.1, -0.2$.

Abb. 3.3 Verlauf der Bézier-Kurve bei Veränderung des Kontrollpunktes \mathbf{b}_2 

(3.3) Übung Erstellen Sie ein Computerprogramm zur Durchführung des Algorithmus von de Casteljau. Stellen Sie die Polynome grafisch dar für die Kontrollpunkte $\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T$, $\mathbf{b}_1 = (1, 2)^T$, $\mathbf{b}_2 = (4, 3)^T$, $\mathbf{b}_3 = (5, -1)^T$.

Zwischen der zu den Punkten $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ gehörigen Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ und den im Algorithmus (3.1) konstruierten Polynomen bestehen die folgenden Zusammenhänge.

(3.4) Satz (a) $\mathbf{b}_0^n(t)$ ist gleich der Bézier-Kurve, d. h. es gilt $\mathbf{b}_0^n(t) = \mathbf{P}(t)$.
 (b) $\mathbf{P}(t)$ lässt sich aus den Subpolynomen $\mathbf{b}_j^r(t)$, $r < n$, wie folgt konstruieren.

$$\mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^{n-r} \mathbf{b}_j^r(t) B_j^{n-r}(t).$$

Beweis

Zu (a): Wir betrachten für beliebiges, aber festes $t \in [0, 1]$ die Funktionenmenge

$$\{\mathbf{b}_j^r(t) : 0 \leq r < n, 0 < j \leq n - r\}$$

als Funktionen der Kontrollpunkte \mathbf{b}_j , $j = 0, \dots, n$.

Darauf definieren wir die Operatoren σ , I und R_t durch

$$\sigma \mathbf{b}_j^r = \mathbf{b}_{j+1}^r, \quad I \mathbf{b}_j^r = \mathbf{b}_j^r, \quad R_t = (1 - t)I + t\sigma \quad \text{für } t \in [0, 1] \text{ beliebig, aber fest.}$$

Es gilt

$$R_t \mathbf{b}_j^{r-1}(t) = (1 - t) \mathbf{b}_j^{r-1}(t) + t \mathbf{b}_{j+1}^{r-1}(t) = \mathbf{b}_j^r(t)$$

und wegen $\sigma(c \cdot \mathbf{b}_j^r(t)) = c \cdot \sigma \mathbf{b}_j^r(t)$ ist

$$\begin{aligned} (R_t)^n \mathbf{b}_0 &= ((1-t)I + t\sigma)^n \mathbf{b}_0 \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} t^j (1-t)^{n-j} \sigma^j \mathbf{b}_0 \\ &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) \\ &= \mathbf{P}(t). \end{aligned}$$

Andererseits sind die Funktionen $(R_t)^r \mathbf{b}_j$ identisch mit den Subpolynomen $\mathbf{b}_j^r(t)$, denn

$$R_t \mathbf{b}_j = (1-t)\mathbf{b}_j + t\mathbf{b}_{j+1} = \mathbf{b}_j^1(t),$$

und durch Induktion folgt

$$(R_t)^r \mathbf{b}_j = R_t((R_t)^{r-1} \mathbf{b}_j) = (1-t)\mathbf{b}_j^{r-1} + t\mathbf{b}_{j+1}^{r-1} = \mathbf{b}_j^r(t).$$

Damit gilt insbesondere für $r = n$ und $j = 0$ die Beziehung $\mathbf{b}_0^n(t) = (R_t)^n \mathbf{b}_0 = \mathbf{P}(t)$.

Der Beweis von (b) kann z.B. über Induktion erfolgen. \square

(3.5) Bemerkung Mit der Formel aus Satz (2.18) gilt für die k -te Ableitung

$$\begin{aligned} \frac{d^k}{dt^k} \mathbf{P}(t) &= \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{n-k} \Delta^k \mathbf{b}_j B_j^{n-k}(t) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \left(\sum_{j=0}^{n-k} \mathbf{b}_j B_j^{n-k}(t) \right) \\ &= \frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{b}_0^{n-k}(t). \end{aligned}$$

(3.6) Übung (a) Leiten Sie mit Hilfe der Vorwärtsdifferenzen (vgl. Übung (2.20) (a)) die folgende Darstellung von Ableitungen der Bézier-Kurve mit Hilfe von Subpolynomen her.

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{P}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \mathbf{b}_j^{n-k}(t).$$

(b) Bemerkungen zur Implementation

Diskutieren Sie Speicherbedarf und Rechenaufwand des de Casteljau-Algorithmus für das numerische Verfahren aus Übung (3.3).

(c) Schreiben Sie ein Unterprogramm zur Umwandlung einer Bézier-Kurve in ein Polynom in Monom-Darstellung (vgl. Übung (2.20) (b)) sowie ein Unterprogramm zur Berechnung von Funktionswerten des Polynoms nach dem Horner-Schema. Vergleichen Sie den Speicher- und Rechenaufwand mit dem Verfahren in (b).

4 Designtechniken für Bézier-Kurven

Der Rechenaufwand zur Konstruktion einer Bézier-Kurve ist in starkem Maß abhängig von der Anzahl der Kontrollpunkte. Aus praktischen Gründen ist es daher erforderlich, einen Kompromiss zu finden zwischen den Freiheitsgraden und Gestaltungsmöglichkeiten (viele Kontrollpunkte) und hoher Recheneffizienz (wenige Kontrollpunkte). Des weiteren ist es wichtig, verschiedene Bézier-Kurven miteinander koppeln zu können.

4.1 Graderhöhung

Graderhöhung bzw. Gradanhebung ist von Bedeutung, wenn man praktisch zum Beispiel quadratische Polynome hat, aber das Grafiksystem als Eingabegrößen kubische Funktionen verlangt oder alle Teilpolynome den gleichen Grad haben müssen..

Problemstellung

Gegeben seien $n + 1$ Punkte $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbb{E}^3$ sowie die zugehörige Bézier-Kurve

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t).$$

Können jetzt $n + 2$ Punkte $\mathbf{Eb}_0, \dots, \mathbf{Eb}_{n+1}$ so gewählt werden, dass die zugehörige Bézier-Kurve identisch ist mit $\mathbf{P}(t)$?

Eine geschickte Nebenrechnung zeigt einen Weg dazu. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t) &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t) \\ &= (t + (1 - t)) \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} t^j (1 - t)^{n-j} \\ &= \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} t^{j+1} (1 - t)^{n-j} + \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \binom{n}{j} t^j (1 - t)^{n-j+1} \\ &= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{b}_{j-1} \frac{\binom{n}{j-1}}{\binom{n+1}{j}} B_j^{n+1}(t) + \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j \frac{\binom{n}{j}}{\binom{n+1}{j}} B_j^{n+1}(t) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \mathbf{Eb}_j B_j^{n+1}(t), \end{aligned}$$

wobei die \mathbf{Eb}_j wie folgt gewählt werden.

$$\mathbf{Eb}_j = \begin{cases} \mathbf{b}_0 & \text{für } j = 0, \\ \mathbf{b}_n & \text{für } j = n + 1, \\ \frac{j}{n+1} \mathbf{b}_{j-1} + \left(1 - \frac{j}{n+1}\right) \mathbf{b}_j & \text{für } j = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Bei letzterer Definition beachte man, dass gelten

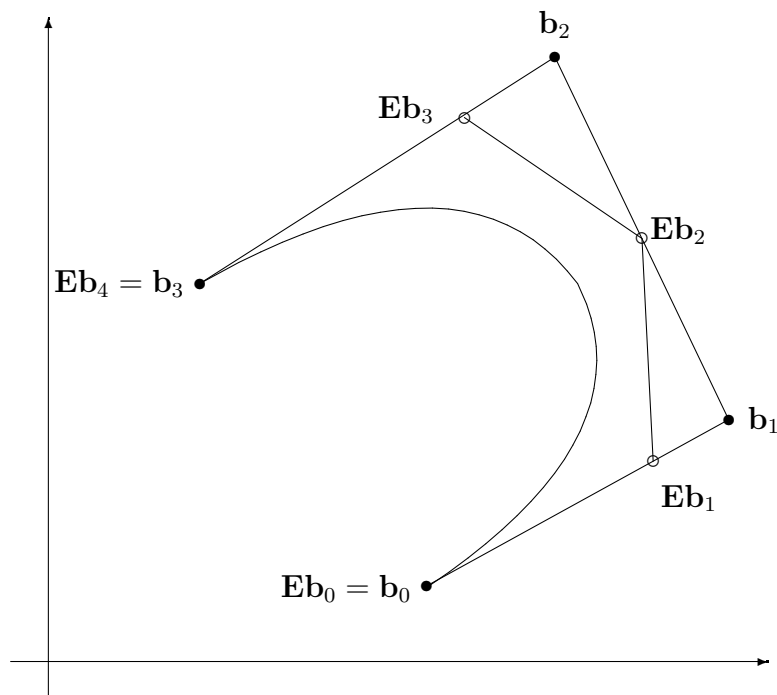
$$\frac{\binom{n}{j-1}}{\binom{n+1}{j}} = \frac{n! \cdot j! \cdot (n+1-j)!}{(j-1)! \cdot (n+1-j)! \cdot (n-1)!} = \frac{j}{n+1}$$

und

$$\frac{\binom{n}{j}}{\binom{n+1}{j}} = \frac{n! \cdot j! \cdot (n+1-j)!}{(n+1)! \cdot j! \cdot (n-j)!} = \frac{n+1-j}{n+1} = 1 - \frac{j}{n+1}.$$

Die neuen Ecken \mathbf{Eb}_j werden aus dem alten Polygon mittels stückweiser linearer Interpolation an den Parameterwerten $j/(n+1)$ gewonnen. Die Linearkombinationen haben damit auch die Eigenschaft einer konvexen Hülle.

Abb. 4.1 Bézier-Kurve mit Graderhöhung des Kontrollpolygons



Das neue Kontrollpolygon aus \mathbf{Eb}_j liegt in der konvexen Hülle der originalen Kontrollpunkte \mathbf{b}_j und ist näher an der Bézier-Kurve.

Obige Überlegung kann nun wiederholt werden, um den Polynomgrad sukzessiv zu erhöhen und sich der Bézier-Kurve weiter anzunähern. Anschaulich entspricht die Graderhöhung dem “Abschneiden von Ecken” des Kontrollpolygons.

Durch Induktion folgt

(4.1) Satz Zur Erhöhung des Polynomgrads um r definiert man die Kontrollpunkte

$$\mathbf{E}^r \mathbf{b}_j = \sum_{i=0}^r \mathbf{b}_{j-i} \binom{n}{j-i} \cdot \frac{\binom{r}{i}}{\binom{n+r}{i+j}}, \quad j = 0, \dots, n+r.$$

(Man beachte: $\binom{n}{m} = 0$ falls $m < 0$ oder $m > n$.) Dann ist

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^{n+r} \mathbf{E}^r \mathbf{b}_j B_j^{n+r}(t).$$

(4.2) Beispiel Gegeben sei die Bézier-Kurve ($n = 3$)

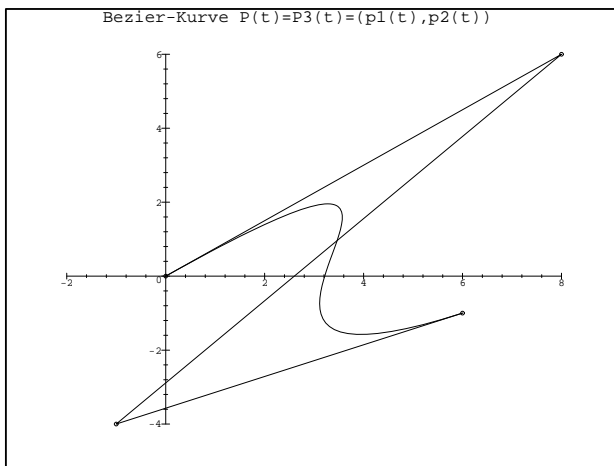
$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{b}_j B_j^3(t)$$

zu den Kontrollpunkten

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_j = \mathbf{E}^0 \mathbf{b}_j.$$

Die Bézier-Kurve ist $\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_3(t) = (33t^3 - 51t^2 + 24t, 29t^3 - 48t^2 + 18t)^T$.

Abb. 4.2 Kontrollpunkte, -polygon und Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$



Auf die Kurve soll nun eine zweimalige Graderhöhung angewendet werden. Dabei wird die Anzahl der Kontrollpunkte um jeweils Eins erhöht. Die Endpunkte sowie die Tangentenrichtungen in den Endpunkten ändern sich dabei nicht. Natürlich bleibt auch die Bézier-Kurve unverändert.

1. Erweiterung auf $n = 4$

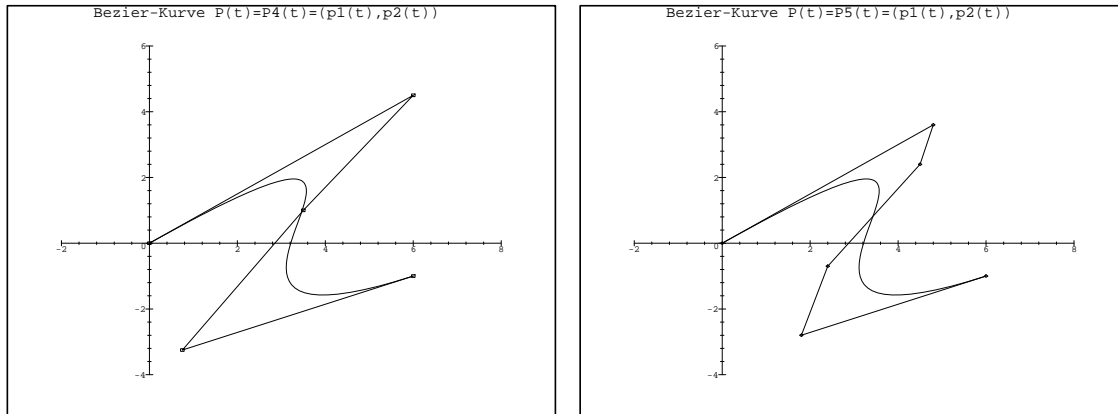
$$\begin{aligned} \mathbf{Eb}_0 &= \mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, & \mathbf{Eb}_j &= \mathbf{E}^1 \mathbf{b}_j, \\ \mathbf{Eb}_1 &= \frac{1}{4} \mathbf{b}_0 + \frac{3}{4} \mathbf{b}_1 = (6, 4.5)^T, \\ \mathbf{Eb}_2 &= \frac{2}{4} \mathbf{b}_1 + \frac{2}{4} \mathbf{b}_2 = (3.5, 1)^T, \\ \mathbf{Eb}_3 &= \frac{3}{4} \mathbf{b}_2 + \frac{1}{4} \mathbf{b}_3 = (0.75, -3.25)^T, \\ \mathbf{Eb}_4 &= \mathbf{b}_3 = (6, -1)^T. \end{aligned}$$

2. Erweiterung auf $n = 5$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^2 \mathbf{b}_0 &= \mathbf{Eb}_0 = \mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \\ \mathbf{E}^2 \mathbf{b}_1 &= \frac{1}{5} \mathbf{Eb}_0 + \frac{4}{5} \mathbf{Eb}_1 = (4.8, 3.6)^T, \\ \mathbf{E}^2 \mathbf{b}_2 &= \frac{2}{5} \mathbf{Eb}_1 + \frac{3}{5} \mathbf{Eb}_2 = (4.5, 2.4)^T, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^2\mathbf{b}_3 &= \frac{3}{5}\mathbf{E}\mathbf{b}_2 + \frac{2}{5}\mathbf{E}\mathbf{b}_3 = (2.4, -0.7)^T, \\ \mathbf{E}^2\mathbf{b}_4 &= \frac{4}{5}\mathbf{E}\mathbf{b}_3 + \frac{1}{5}\mathbf{E}\mathbf{b}_4 = (1.8, -2.8)^T, \\ \mathbf{E}^2\mathbf{b}_5 &= \mathbf{E}\mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_3 = (6, -1)^T.\end{aligned}$$

Abb. 4.3 Kontrollpunkte, -polygone und Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ für die 1. und 2. Graderhöhung

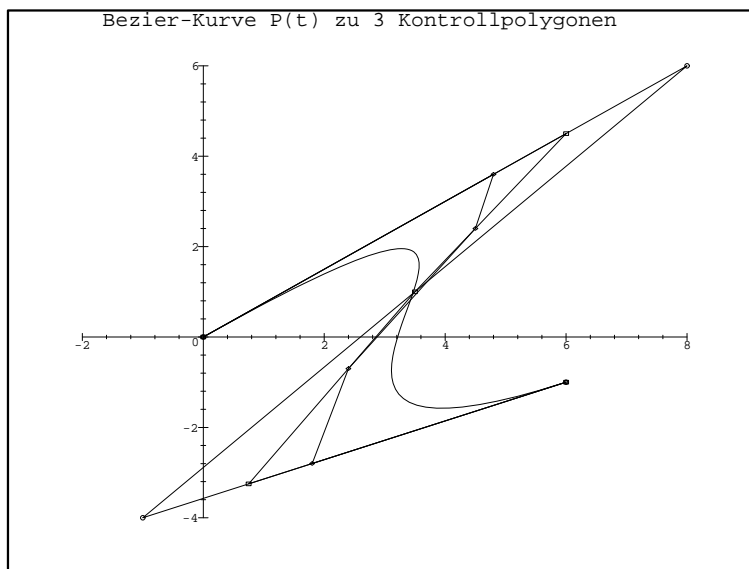


Eine Änderung der Kontrollpunkte \mathbf{b}_1 und \mathbf{b}_2 , $\mathbf{E}\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{E}\mathbf{b}_3$ oder $\mathbf{E}^2\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{E}^2\mathbf{b}_4$ verändert i. Allg. die Tangenten in den Randpunkten.

Dagegen lässt eine Änderung von $\mathbf{E}^1\mathbf{b}_2$ oder $\mathbf{E}^2\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{E}^2\mathbf{b}_3$ in $\mathbf{P}(t)$ die Tangenten unverändert.

Wir beobachten, dass durch Hinzufügen weiterer Punkte die Kontrollpunkte näher an die Bézier-Kurve heranrücken.

Abb. 4.4 Kontrollpunkte, -polygone und Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ für Original sowie 1. und 2. Graderhöhung



Überprüfen wir, wie die Konvergenz der Kontrollpolygone gegen die Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t) = (p_1(t), p_2(t))$ abläuft.

Mit einem TP-Programm berechnen wir die Punkte $\mathbf{E}^r \mathbf{b}_j$, $j = 0, 1, \dots, n+r$, aufeinanderfolgender Graderhöhungen, also $r = 1, 2, \dots$, und dazu den Abstand

$$A_{n,r} = \max_{j=0,1,\dots,n+r} \max_{i=1,2} |\mathbf{E}^r \mathbf{b}_{j,i} - p_i(j/(n+r))|.$$

Wir untersuchen $A_{n,r}$ für wachsendes r und ermitteln empirisch die Abnahmerate.

TP-Programm

```

program BEZIER_GRAD2;
{ (C) W. Neundorf IfMath TUilmenau 2001
  Bezier-Kurven mit Graderhoehung um jeweils Grad 1
  und Bestimmung des Abstandes

  BEZ_GRA2.PAS                                     }

uses crt;

type float =real;
   vector2=array[1..2] of float;
const n      =3;
      rmax   =1000;
      nmax   =n+rmax;

      b:array[0..n] of vector2=
        (( 0, 0),
         ( 8, 6),
         (-1,-4),
         ( 6,-1));
      dname='bez2.dat';

type vector=array[0..nmax] of vector2;
var  a :vector;
      r,k:integer;
      ab1:float;
      res:text;

function p1(t:float):float;
begin
  p1:=b[0,1]*(1-t)*(1-t)*(1-t)+b[1,1]*3*t*(1-t)*(1-t)+
      b[2,1]*3*t*t*(1-t)+b[3,1]*t*t*t;
end;
```

```

function p2(t:float):float;
begin
  p2:=b[0,2]*(1-t)*(1-t)*(1-t)+b[1,2]*3*t*(1-t)*(1-t)+
    b[2,2]*3*t*t*(1-t)+b[3,2]*t*t*t;
end;
function max(x,y:float):float;
begin
  if x<y then max:=y else max:=x;
end;

function Abstand(n:integer; a:vector):float;
var k :integer;
    hv:float;
begin
  hv:=0;
  for k:=1 to n-1 do
    begin
      hv:=max(hv,abs(a[k,1]-p1(k/n)));
      hv:=max(hv,abs(a[k,2]-p2(k/n)));
    end;
  Abstand:=hv;
  if (n<=10) and (n in [3,4,5,6,8,9,10]) then
    begin
      writeln('n=',n,' Abstand=',hv:7:3);
      writeln(res,'n=',n,' Abstand=',hv:7:3);
      for k:=0 to n do
        begin
          writeln('(',a[k,1]:6:3,',',a[k,2]:6:3,')',
            ' (',p1(k/n):7:3,',',p2(k/n):6:3,')');
          writeln(res,'(',a[k,1]:6:3,',',a[k,2]:6:3,')',
            ' (',p1(k/n):6:3,',',p2(k/n):6:3,')');
        end;
      readln;
    end;
end;

procedure grad_elev(n:integer; var a:vector);
var k,l:integer;
    as :vector;
begin
  as[0]:=a[0];
  as[n+1]:=a[n];
  for k:=1 to n do
    for l:=1 to 2 do
      as[k,l]:=k/(n+1)*a[k-1,l]+(n+1-k)/(n+1)*a[k,l];
    for k:=0 to n+1 do a[k]:=as[k];
  end;
end;

```

```

begin
  clrscr;
  assign(res,dname); rewrite(res);
  writeln('Bezier-Kurven mit Graderhoehung um jeweils Grad 1');
  writeln('und Abstandsbestimmung');
  writeln;
  writeln(res,'Bezier-Kurven mit Graderhoehung um jeweils Grad 1');
  writeln(res,'und Abstandsbestimmung');
  writeln(res);
  for k:=0 to n do a[k]:=b[k];
  ab1:=abstand(n,a);
  writeln('n= ',n:4,' Abstand= ',ab1:8:6);
  writeln;
  writeln(res,'n= ',n:4,' Abstand= ',ab1:8:6);
  writeln(res);
  for r:=1 to rmax do
    begin
      grad_elev(n+r-1,a);
      abstand(n+r,a);
      if (r div 100)*100=r then
        begin
          ab1:=abstand(n+r,a);
          writeln('n= ',n+r:4,' Abstand= ',ab1:8:6,
            ' ...*n= ', ab1*(n+r):6:3);
          writeln(res,'n= ',n+r:4,' Abstand= ',ab1:8:6,
            ' ...*n= ', ab1*(n+r):6:3);
        end;
      end;
    writeln;
    writeln('Abnahmerate ca ',ab1*(n+r):3:1,'/n');
    writeln(res);
    writeln(res,'Abnahmerate ca ',ab1*(n+r):3:1,'/n');
  close(res);
  readln;
end.

```

Aus der Ergebnisdatei `bez2.dat` zeigen wir zunächst die Ausgangssituation und erste Graderhöhungen mit der Angabe von n , Abstand $A_{n,r}$ sowie Tabellen mit den Spalten $(\mathbf{E}^r \mathbf{b}_{j,1}, \mathbf{E}^r \mathbf{b}_{j,2})$ ($p_1(j/(n+r))$, $p_2(j/(n+r))$), $j = 0, 1, \dots, n+r$.

Ausgangskontrollpunkte und entsprechende Werte auf der Bezier-Kurve

```

n=3 Abstand= 4.444
( 0.000, 0.000) ( 0.000, 0.000)
( 8.000, 6.000) ( 3.556, 1.741)
(-1.000,-4.000) ( 3.111,-0.741)
( 6.000,-1.000) ( 6.000,-1.000)

```

Graderhoehungen

```
n=4  Abstand=  2.672
( 0.000, 0.000) ( 0.000, 0.000)
( 6.000, 4.500) ( 3.328, 1.953)
( 3.500, 1.000) ( 3.375, 0.625)
( 0.750,-3.250) ( 3.234,-1.266)
( 6.000,-1.000) ( 6.000,-1.000)
```

```
n=5  Abstand=  1.776
( 0.000, 0.000) ( 0.000, 0.000)
( 4.800, 3.600) ( 3.024, 1.912)
( 4.500, 2.400) ( 3.552, 1.376)
( 2.400,-0.700) ( 3.168,-0.216)
( 1.800,-2.800) ( 3.456,-1.472)
( 6.000,-1.000) ( 6.000,-1.000)
```

```
...
n=10 Abstand=  0.643
( 0.000, 0.000) ( 0.000, 0.000)
( 2.400, 1.800) ( 1.923, 1.349)
( 3.667, 2.533) ( 3.024, 1.912)
( 4.075, 2.442) ( 3.501, 1.863)
( 3.900, 1.767) ( 3.552, 1.376)
( 3.417, 0.750) ( 3.375, 0.625)
( 2.900,-0.367) ( 3.168,-0.216)
( 2.625,-1.342) ( 3.129,-0.973)
( 2.867,-1.933) ( 3.456,-1.472)
( 3.900,-1.900) ( 4.347,-1.539)
( 6.000,-1.000) ( 6.000,-1.000)
```

Weitere Graderhöhungen geben Aufschluss über das doch recht langsame Konvergenzverhalten und die entsprechende Abnahmerate.

```
n=    3  Abstand=  4.444444
n=  103  Abstand=  0.049780  ...*n=  5.127
n=  203  Abstand=  0.024984  ...*n=  5.072
n=  303  Abstand=  0.016676  ...*n=  5.053
n=  403  Abstand=  0.012515  ...*n=  5.044
n=  503  Abstand=  0.010016  ...*n=  5.038
n=  603  Abstand=  0.008349  ...*n=  5.034
n=  703  Abstand=  0.007157  ...*n=  5.032
n=  803  Abstand=  0.006263  ...*n=  5.029
n=  903  Abstand=  0.005568  ...*n=  5.028
n= 1003  Abstand=  0.005012  ...*n=  5.027
```

Abnahmerate ca $5.0/n$

Die Beobachtung aus dem vorhergehenden numerischen Experiment entspricht einem allgemeinen Ergebnis, welches im folgenden Satz beschrieben ist, den wir ohne Beweis wiedergeben.¹

(4.3) Satz Sei

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t)$$

die zu den Kontrollpunkten \mathbf{b}_j , $j = 0 \dots, n$, gehörige Bézier-Kurve. Dann gilt

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \max_{j=0, \dots, n+r} \|\mathbf{E}^r \mathbf{b}_j - \mathbf{P}(j/(n+r))\| = 0.$$

Als Norm kann man die euklidische oder die Maximumnorm wie im Beispiel (4.2) wählen.

(4.4) Übung Schreiben Sie ein Unterprogramm zur Berechnung der Kontrollpunkte einer Bézier-Kurve bei Graderhöhung. Berechnen Sie mit Hilfe eines Computerprogramms für wachsendes r die Abweichungen

$$\max_{j=0, \dots, n+r} \|\mathbf{E}^r \mathbf{b}_j - \mathbf{P}(j/(n+r))\|.$$

4.2 Gradreduktion

Problemstellung

Kann eine zu den $n+1$ Kontrollpunkten $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ gehörige Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ auch durch n Punkte $\hat{\mathbf{b}}_0, \dots, \hat{\mathbf{b}}_{n-1}$ beschrieben werden?

Vorüberlegung

$\mathbf{P}(t)$ ist i. Allg. ein Polynom n -ten Grades und kann daher in der Regel durch n Punkte nicht exakt repräsentiert werden. Durch Gradreduktion (auch Gradreduzierung genannt) kann somit höchstens eine **Approximation** von $\mathbf{P}(t)$ erreicht werden, eine exakte Gradreduktion ist i. Allg. nicht möglich.

(4.5) Beispiel Eine kubische Kurve mit einem Wendepunkt kann nicht als quadratische Kurve dargestellt werden.

Seien die Kontrollpunkte für die kubische Bézier-Kurve

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \quad \mathbf{b}_1 = (2, 4)^T, \quad \mathbf{b}_2 = (4, -2)^T, \quad \mathbf{b}_3 = (6, 0)^T.$$

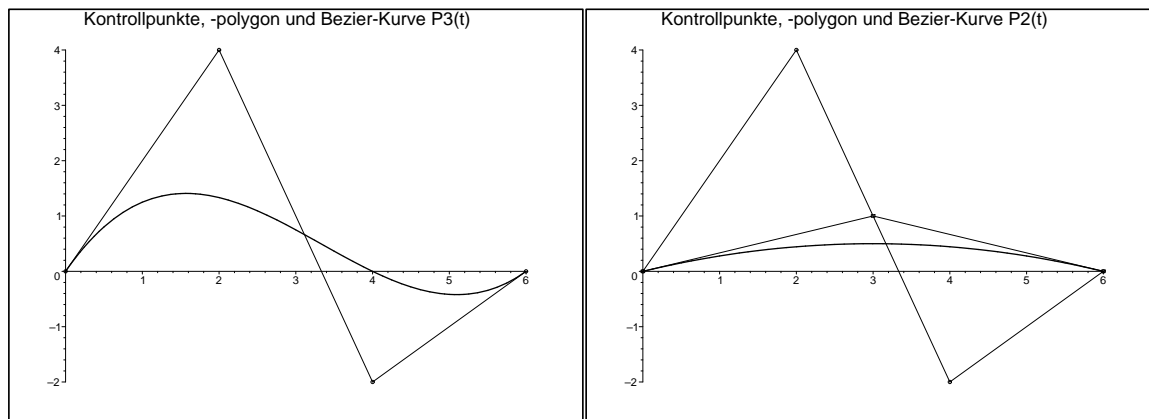
Bei Gradreduktion will man i. Allg. die Eigenschaft der Endpunktinterpolation erhalten. So werden die beiden Endpunkte übernommen und ein Zwischenpunkt definiert, das ist

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{b}_0, \quad \tilde{\mathbf{b}}_1 = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = (3, 1)^T, \quad \tilde{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{b}_3.$$

¹Eine Beweisskizze befindet sich beispielsweise in Satz 2.2.4.1 von [W. Dahmen und A. Kunoth. Mathematische Methoden in der geometrischen Datenverarbeitung (CAGD). Vorlesungsausarbeitung Freie Universität Berlin (1990)]. Der Satz 2.2.5.1 gibt eine quantitative Abschätzung des Abstandes der Kontrollpunkte von der Kurve.

Die Bézier-Kurve zu den 3 neuen Kontrollpunkten $\tilde{\mathbf{b}}_j$ kann nur ein quadratisches Polynom sein, unabhängig von der Wahl eines sinnvollen Zwischenpunkts.

Abb 4.5 Gradreduktion einer kubischen Bézier-Kurve



Die entsprechenden Bézier-Kurven sind

$$\mathbf{P}_3(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 12t - 30t^2 + 18t^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_2(t) = \begin{pmatrix} 6t \\ 2t - 2t^2 \end{pmatrix}.$$

Die Approximation mit der Gradreduktion ist formal die Umkehrung der Graderhöhung.

Modifizierte Graderhöhung

$$\mathbf{E}\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{E}\mathbf{b}_{n+1} = \mathbf{b}_n, \quad \mathbf{E}\mathbf{b}_j = \frac{j}{n}\mathbf{b}_{j-1} + \left(1 - \frac{j}{n}\right)\mathbf{b}_j, \quad j = 1, \dots, n.$$

Hieraus ergeben sich die Gleichungen

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_j &= \frac{n \mathbf{E}\mathbf{b}_j - j \mathbf{b}_{j-1}}{n - j} = \left(1 + \frac{j}{n - j}\right) \mathbf{E}\mathbf{b}_j - \frac{j}{n - j} \mathbf{b}_{j-1}, \\ \mathbf{b}_{j-1} &= \frac{n \mathbf{E}\mathbf{b}_j - (n - j) \mathbf{b}_j}{j} = \frac{n}{j} \mathbf{E}\mathbf{b}_j - \left(\frac{n}{j} - 1\right) \mathbf{b}_j. \end{aligned}$$

Daraus erkennt man die Idee und eine rekursive Vorgehensweise zum Gradreduktionsprozess von links nach rechts bzw. von rechts nach links.

Gradreduktion

1. Versuch “von links nach rechts“

Zu $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ definiert man

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{b}_0, \quad \hat{\mathbf{b}}_j = \frac{n \mathbf{b}_j - j \hat{\mathbf{b}}_{j-1}}{n - j}, \quad j = 1, \dots, n - 1.$$

Dies liefert die Anfangspunktübereinstimmung und eine gute Approximation in der Nähe des Anfangspunkts, ist aber schlecht in der Nähe des Endpunkts.

2. Versuch “von rechts nach links“

Zu $\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_0$ definiert man

$$\bar{\mathbf{b}}_{n-1} = \mathbf{b}_n, \quad \bar{\mathbf{b}}_{j-1} = \frac{n \mathbf{b}_j - (n-j) \bar{\mathbf{b}}_j}{j}, \quad j = n-1, \dots, 1.$$

Damit erhält man gute Ergebnisse am Endpunkt, schlechte am Anfangspunkt.

Beide Versuche verwenden baryzentrische Kombinationen und sind Extrapolationsmethoden, haben aber nicht die Eigenschaft einer konvexen Hülle. Damit neigen sie zu instabilem Verhalten.

3. Versuch 1. Kopplung bzw. 1. Mischung der beiden ersten Versuche

Man definiert

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}_0 &= \mathbf{b}_0, \quad \tilde{\mathbf{b}}_{n-1} = \mathbf{b}_n, \\ \tilde{\mathbf{b}}_j &= \left(1 - \frac{j}{n-1}\right) \hat{\mathbf{b}}_j + \frac{j}{n-1} \bar{\mathbf{b}}_j, \quad j = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Die konvexe baryzentrische Kombination der beiden ersten Versuche liefert in vielen Fällen brauchbare Ergebnisse.

Ungünstiger erweist sich zum Beispiel folgende Mischungsvariante.

4. Versuch 2. Mischung der beiden ersten Versuche

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}_0 &= \mathbf{b}_0, \quad \tilde{\mathbf{b}}_{n-1} = \mathbf{b}_n, \\ \tilde{\mathbf{b}}_j &= \frac{1}{2} \hat{\mathbf{b}}_j + \frac{1}{2} \bar{\mathbf{b}}_j, \quad j = 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

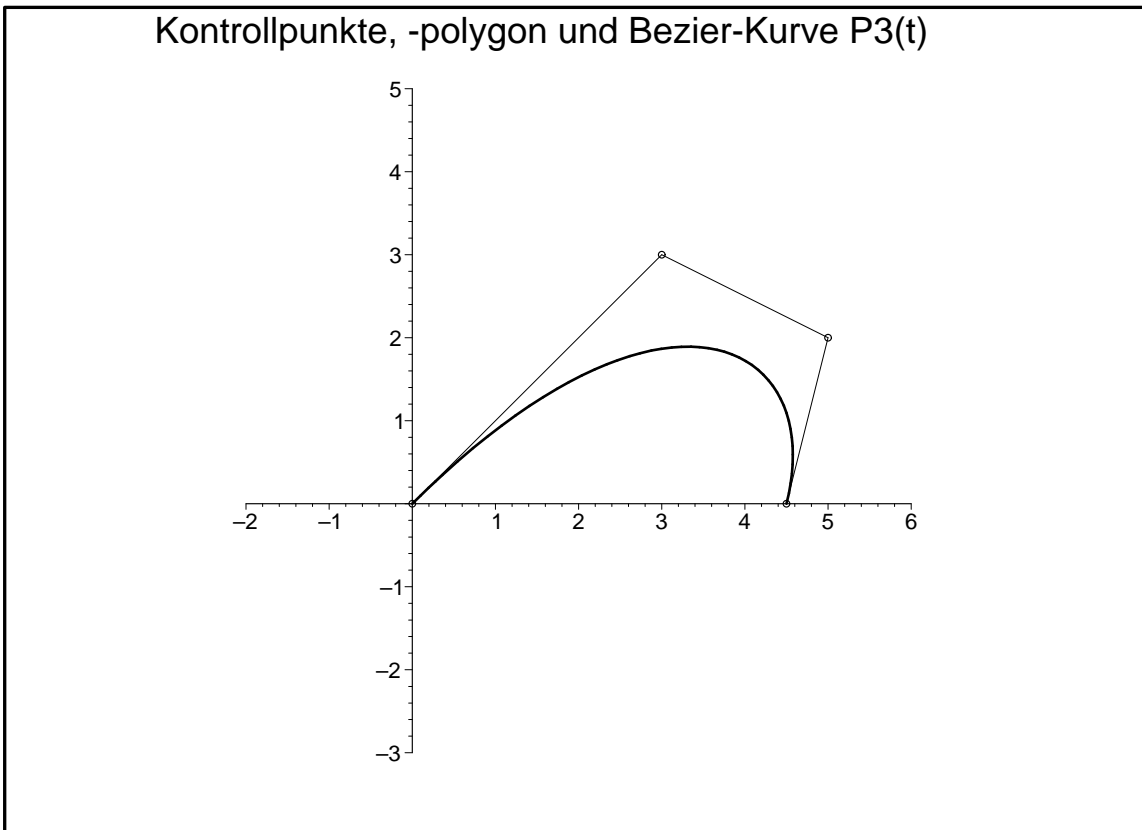
Bei allen Mischungen verändern sich jedoch die Anfangs- und Endsteigung der reduzierten Bézier-Kurve im Vergleich zur originalen.

(4.6) Beispiel Gegeben seien die Kontrollpunkte

$$\mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die kubische Bézier-Kurve ist

$$\mathbf{P}_3(t) = \begin{pmatrix} 9t - 3t^2 - 1.5t^3 \\ 9t - 12t^2 + 3t^3 \end{pmatrix}.$$

Abb 4.6 Kontrollpolygon mit kubischer Bézier-Kurve

(a) 1. Versuch “von links nach rechts“

$$\hat{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}_1 = \frac{3\mathbf{b}_1 - \hat{\mathbf{b}}_0}{2} = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}}_2 = \frac{3\mathbf{b}_2 - 2\hat{\mathbf{b}}_1}{1} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Der linke Anstieg $\hat{\mathbf{b}}_0 \rightarrow \hat{\mathbf{b}}_1$ ist wie $\mathbf{b}_0 \rightarrow \mathbf{b}_1$.

Quadratische Bézier-Kurve

$$\mathbf{P}_2(t) = \begin{pmatrix} 9t - 3t^2 \\ 9t - 12t^2 \end{pmatrix}.$$

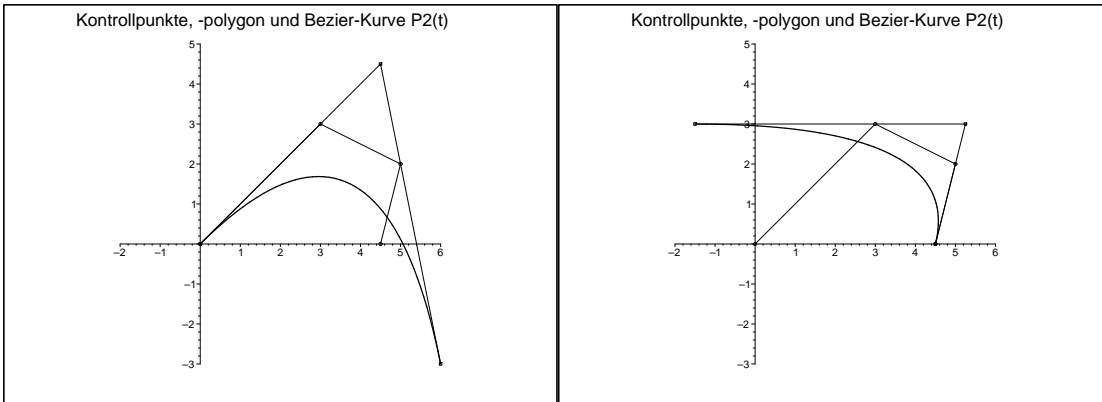
(b) 2. Versuch “von rechts nach links“

$$\bar{\mathbf{b}}_2 = \mathbf{b}_3 = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}}_1 = \frac{3\mathbf{b}_2 - \bar{\mathbf{b}}_2}{2} = \begin{pmatrix} 5.25 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{b}}_0 = \frac{3\mathbf{b}_1 - 2\bar{\mathbf{b}}_1}{1} = \begin{pmatrix} -1.5 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Der rechte Anstieg $\bar{\mathbf{b}}_1 \rightarrow \bar{\mathbf{b}}_2$ ist wie $\mathbf{b}_2 \rightarrow \mathbf{b}_3$.

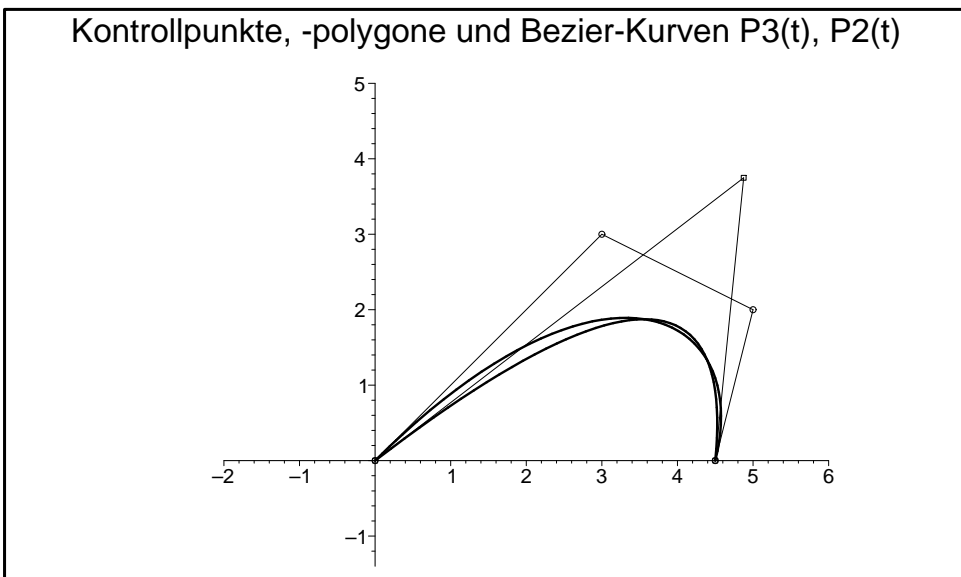
Quadratische Bézier-Kurve

$$\mathbf{P}_2(t) = \begin{pmatrix} -1.5 + 13.5t - 7.5t^2 \\ 3 - 3t^2 \end{pmatrix}.$$

Abb 4.7 Gradreduktion von links/rechts mit den quadratischen Bézier-Kurven

(c) 1. Mischung

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_2 = \begin{pmatrix} 4.5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}}_1 = 0.5 \cdot (\hat{\mathbf{b}}_1 + \bar{\mathbf{b}}_1) = \begin{pmatrix} 4.875 \\ 3.75 \end{pmatrix}.$$

Bei $n = 3$ ist die 2. Mischung mit dieser identisch.**Abb 4.8** Polygone mit Bézier-K. $\mathbf{P}_3(t)$ und quadratischer Bézier-K. der Mischung

Bei der Mischung bleibt die Anfangs- und Endpunktinterpolationseigenschaft erhalten, aber die Anstiege dort weichen etwas ab von den Originalanstiegen.

Die quadratische Bézier-Kurve aus der Mischung hat die Form

$$\mathbf{P}_2(t) = \begin{pmatrix} 9.75t - 5.25t^2 \\ 7.5t - 7.5t^2 \end{pmatrix}.$$

(4.7) Übung (a) Wie ändern sich in jedem der drei Versuche die Endpunkte sowie die Tangenten in den Endpunkten?

(b) Führen Sie die reduzierten Bézier-Kurven des Beispiels (4.6) durch Graderhöhung wieder auf Polynome dritten Grades zurück. Vergleichen Sie diese mit dem Ausgangspolynom. Vergleichen Sie das quadratische Bézier-Polynom aus Beispiel (4.6)(c) mit dem Interpolationspolynom zur Ausgangs-Bézier-Kurve zu den Knoten $t = 0, 0.5, 1$.

(c) Führen Sie für die graderweiterten Polynome des Beispiels (4.2) eine bzw. zwei Gradreduktionen durch und vergleichen Sie die so entstandenen Kontrollpunkte mit denen der Ausgangs-Bézier-Kurve. Erklären Sie die Ergebnisse.

4.3 Zusammengesetzte Bézier-Kurven

Problemstellung

Seien $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n$ und $\mathbf{c}_0, \dots, \mathbf{c}_m$ die Kontrollpunkte der Bézier-Kurven

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_n(t) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t), \quad \mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_m(t) = \sum_{j=0}^m \mathbf{c}_j B_j^m(t).$$

$\mathbf{P}(t)$ und $\mathbf{Q}(t)$ sollen hintereinander zu einer Kurve zusammengefügt werden. Welche Bedingungen an die Kontrollpunkte müssen erfüllt sein, damit die Kurve an der Schnittstelle entsprechend glatt ist?

Die zusammengesetzten Stücke nennt man auch *Segmente*.

(4.8) Beispiel Stetige und stetig differenzierbare zusammengesetzte Bézier-Kurven

Mit den zwei Segmenten der Kontrollpunkte

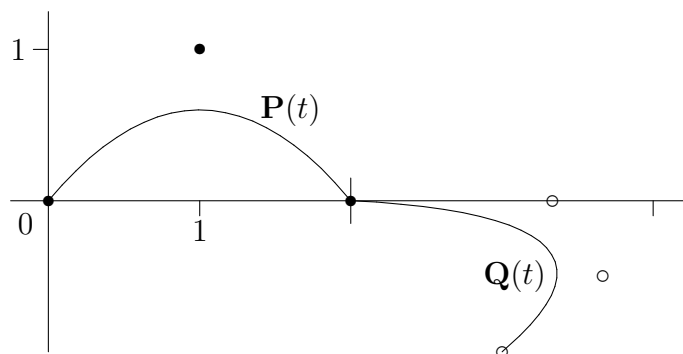
$$\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \quad \mathbf{b}_1 = (1, 1)^T, \quad \mathbf{b}_2 = (2, 0)^T,$$

und

$$\mathbf{c}_0 = (2, 0)^T, \quad \mathbf{c}_1 = (10/3, 0)^T, \quad \mathbf{c}_2 = (11/3, -1/2)^T, \quad \mathbf{c}_3 = (3, -1)^T.$$

erhält man eine Gesamtkurve $\mathbf{R}(t)$, die im Anknüpfungspunkt $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_0$ nur stetig ist.

Abb 4.9 Zusammengesetzte stetige Bézier-Kurve

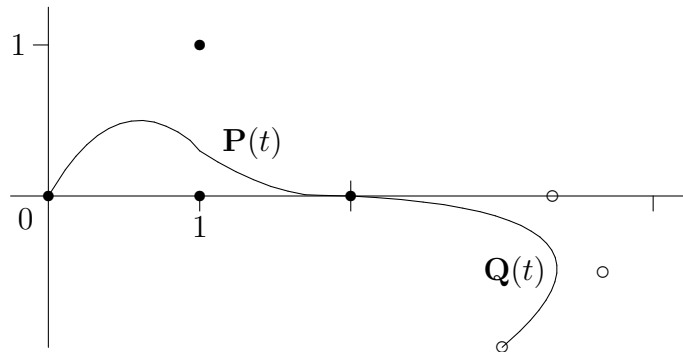


Wir wählen nun im ersten Segment noch den Zusatzpunkt $(1, 0)^T$ und somit die Kontrollpunktfolge

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \quad \mathbf{b}_1 = (1, 1)^T, \quad \mathbf{b}_2 = (1, 0)^T, \quad \mathbf{b}_3 = (2, 0)^T.$$

Dadurch erzwingen wir, dass zusätzlich die Tangentenanstiege am Ende des 1. Segments und am Anfang des 2. Segments übereinstimmen. Die Kurve ist somit stetig differenzierbar.

Abb 4.10 Zusammengesetzte stetig differenzierbare Bézier-Kurve



Es ist natürlich nicht zu erwarten, dass die zusammengesetzte Bézier-Kurve mit der Bézier-Kurve übereinstimmt, die sich aus der Zusammenfassung aller Kontrollpunkte ergibt. Insbesondere werden an der Schnittstelle i. Allg. weder Funktionswert noch Ableitungswerte die gleichen sein.

Die zusammengelegte Kontrollpunktfolge ist

$$(0,0)^T, (1,1)^T, (1,0)^T, (2,0)^T, (10/3,0)^T, (11/3,-1/2)^T, (3,-1)^T.$$

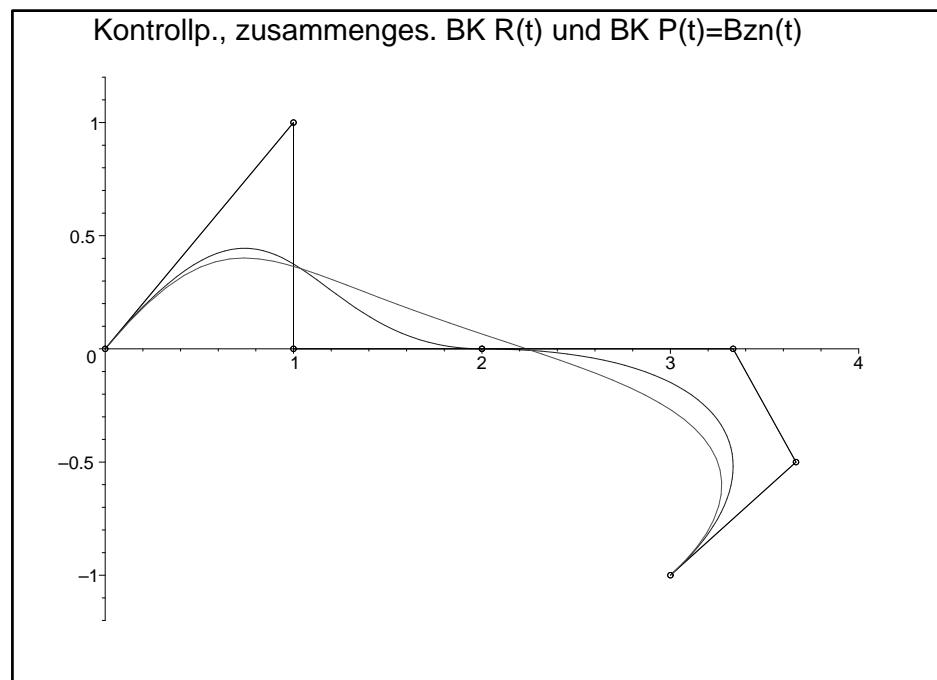


Abb 4.11 Zusammengesetzte stetig differenzierbare Bézier-Kurve mit zwei Segmenten gemäß $\mathbf{b} = [[0, 0], [1, 1], [1, 0], [2, 0]]$, $\mathbf{c} = [[2, 0], [10/3, 0], [11/3, -1/2], [3, -1]]$ sowie Bézier-Kurve 6. Grades mit allen Kontrollpunkten $\mathbf{b} \cup \mathbf{c}$

Die zugehörige Bézier-Kurve 6. Grades ergibt sich mit den Bernstein-Polynomen

$$\begin{aligned} B_0^6(t) &= (1-t)^6, & B_1^6(t) &= 6t(1-t)^5, \\ B_2^6(t) &= 15t^2(1-t)^4, & B_3^6(t) &= 20t^3(1-t)^3, \\ B_4^6(t) &= 15t^4(1-t)^2, & B_5^6(t) &= 6t^5(1-t), \\ B_6^6(t) &= t^6, \end{aligned}$$

gemäß den beiden Koordinatenfunktionen

$$\begin{aligned} p_1(t) &= 6t - 15t^2 + 40t^3 - 40t^4 + 12t^5, \\ p_2(t) &= 6t - 30t^2 + 60t^3 - 60t^4 + 27t^5 - 4t^6. \end{aligned}$$

Um aufeinanderfolgende Segmente zu einer Gesamtkurve zu verbinden, muss man eine geeignete Parametrisierung der Kurve einführen.

(4.9) Definition der zusammengesetzten Kurve $\mathbf{R}(t)$

Man wähle $\tau \in (0, 1)$ fest.

Transformation von $\mathbf{P}(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ auf $\tilde{\mathbf{P}}(t) : [0, \tau] \rightarrow \mathbb{E}^3$:

$$\tilde{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{P}(t/\tau);$$

Transformation von $\mathbf{Q}(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$ auf $\tilde{\mathbf{Q}}(t) : [\tau, 1] \rightarrow \mathbb{E}^3$:

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t) = \mathbf{Q}((t - \tau)/(1 - \tau)).$$

Für $t \in [0, 1]$ definiert man nun

$$\mathbf{R}(t) = \begin{cases} \tilde{\mathbf{P}}(t) & \text{falls } t \in [0, \tau), \\ \tilde{\mathbf{Q}}(t) & \text{falls } t \in [\tau, 1]. \end{cases}$$

Glattheit von $\mathbf{R}(t)$

– Stetigkeit: $\mathbf{R}(t)$ ist stetig in $t = \tau$, wenn $\tilde{\mathbf{P}}(\tau) = \tilde{\mathbf{Q}}(\tau)$, wenn also

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{P}(1) = \tilde{\mathbf{P}}(\tau) = \tilde{\mathbf{Q}}(\tau) = \mathbf{Q}(0) = \mathbf{c}_0.$$

– Differenzierbarkeit: Damit $\mathbf{R}(t)$ in $t = \tau$ differenzierbar ist, muss $\mathbf{R}(t)$ stetig sein und $d_t \tilde{\mathbf{P}}(\tau) = \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{P}}(\tau)$ muss in dieselbe Richtung zeigen wie $d_t \tilde{\mathbf{Q}}(\tau)$.

Insbesondere ist die Übereinstimmung der Tangentenrichtungen im Punkt τ zu sichern, was als

$$\Delta \mathbf{b}_{n-1} \sim \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{P}}(\tau) \sim \frac{d}{dt} \tilde{\mathbf{Q}}(\tau) \sim \Delta \mathbf{c}_0$$

notiert wird.

– Bedingungen für höhere Ableitungen können entsprechend mit Hilfe höherer Vorwärtsdifferenzen formuliert werden.

– Bei weiteren Segmenten wählt man z. B. eine monoton wachsende Folge von äquidistanten Zwischenpunkten τ aus $(0, 1)$.

Die Glattheit von $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ kann wie folgt aus den Vorwärtsdifferenzen hergeleitet werden.

(4.10) Satz Die zusammengesetzte Bézier-Kurve $\mathbf{R}(\mathbf{t})$ ist genau dann k -mal stetig differenzierbar ($k \leq n$ und $k \leq m$), wenn gilt

$$\mathbf{b}_n = \mathbf{c}_0,$$

und wenn Konstanten $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, k$, existieren mit

$$\Delta^j \mathbf{b}_{n-j} = \lambda_j \Delta^j \mathbf{c}_0.$$

(4.11) Beispiel Gegeben sei eine Bézier-Kurve mit den Kontrollpunkten

$$\dots, \mathbf{b}_{n-2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{n-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_n = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Angefügt werden soll eine Kurve mit den Kontrollpunkten $\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m$.

(a) Wie sind die Parameter zu wählen, damit die zusammengesetzte Kurve zweimal differenzierbar ist?

– Stetigkeit

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{b}_n = (3, 3)^T.$$

– Differenzierbarkeit

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0 &= \lambda_1 (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}), \quad \lambda_1 > 0, \quad \text{also} \\ \mathbf{c}_1 &= (3, 3)^T + \lambda_1 (1, -1)^T. \end{aligned}$$

– Zweimalige Differenzierbarkeit

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_2 - 2\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_0 &= \lambda_2 (\mathbf{b}_n - 2\mathbf{b}_{n-1} + \mathbf{b}_{n-2}), \quad \lambda_2 > 0, \quad \text{also} \\ \mathbf{c}_2 &= 2\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0 + \lambda_2 (\mathbf{b}_n - 2\mathbf{b}_{n-1} + \mathbf{b}_{n-2}) \\ &= -(3, 3)^T + 2\lambda_1 (1, -1)^T - \lambda_2 (2, 4)^T. \end{aligned}$$

Für $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ erhalten wir im 2. Segment die anfänglichen Kontrollpunkte

$$\mathbf{c}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(b) Wie sind die Parameter zu wählen, damit die zusammengesetzte Kurve stetig ist und die Anknüpfungsstelle ein Rückkehrpunkt ist?

– Stetigkeit wie in (a)

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{b}_n = (3, 3)^T.$$

– Rückkehrpunkt \Rightarrow Ableitungen mit verschiedenen Vorzeichen

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_0 &= \lambda_1 (\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1}), \quad \lambda_1 < 0, \quad \text{also} \\ \mathbf{c}_1 &= (3, 3)^T + \lambda_1 (1, -1)^T. \end{aligned}$$

Für $\lambda_1 = -2$ erhalten wir im 2. Segment die ersten beiden Kontrollpunkte

$$\mathbf{c}_0 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

5 Interpolation

5.1 Polynominterpolation im \mathbb{R}^1

Zur Beschreibung der Polynominterpolation verwendet man folgende Größen und Bezeichnungen.

- Grundintervall I
 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und (bekannte oder unbekannte) reelle Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.

- Stützstellen x_i und Stützwerte y_i sowie

$$R_0 = \{(x_i, y_i) \mid a \leq x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n \leq b\}$$

als **Referenz** (Punktfolge, Knotenfolge) mit $n+1$ paarweise verschiedenen **Stützstellen** x_i und den $n+1$ zugehörigen **Stützwerten** y_i . Falls eine Funktion $f(x)$ zu Grunde liegt, definiert man die Stützwerte i. Allg. gemäß $y_i = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$.

- Interpolationspolynom

$$p_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

Das ist der Ansatz als Polynom vom Grad $\leq n$ mit den **Basisfunktionen** $x^n, x^{n-1}, \dots, x, 1$ (monomiale Basis).

\mathcal{P}_n sei der Raum der Polynome vom Grad $\leq n$, so dass $p_n(x) \in \mathcal{P}_n$.

- Interpolationsforderung (Interpolationsbedingung)

$$p_n(x_i) = y_i = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

- **Interpolationsaufgabe (IA1)**

Gesucht sind Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n , so dass die Interpolationsforderung erfüllt ist.

Weitere Interpolationsaufgaben ergeben sich durch verschiedene Varianten der Wahl der Basisfunktionen.

- (1) Allgemeine lineare Interpolation

$$\phi(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \dots + a_n\phi_n(x)$$

mit den **Basisfunktionen** $\phi_i(x)$.

- (2) Trigonometrische Interpolation

$$\begin{aligned} \phi(x) = & a_0 + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x) + a_2 \cos(2x) + b_2 \sin(2x) + \\ & \dots + a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx). \end{aligned}$$

- (3) Zweidimensionale Polynominterpolation

$$\begin{aligned} \phi(u, v) = & a_{00} + a_{10}u + a_{11}v + a_{20}u^2 + a_{21}uv + a_{22}v^2 + \\ & \dots + a_{m0}u^m + \dots + a_{mm}v^m. \end{aligned}$$

4 Fragestellungen

bzw. Probleme sind bei der Lösung der Interpolationsaufgabe (IA1) von Bedeutung.

1. Existiert zu jeder gegebenen Referenz R_0 mit $n + 1$ Punkten ein Interpolationspolynom $p_n(x)$ vom Grad $\leq n$?
2. Ist $p_n(x)$ eindeutig bestimmt?
3. Wie kann $p_n(x)$ effektiv und numerisch stabil konstruiert werden?
4. Wie erhält man eine Schätzung des **Interpolationsfehlers**

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

für alle $x \in I$?

(5.1) Satz Existenz und Eindeutigkeit

Die Interpolationsaufgabe (IA1) ist für beliebiges Intervall I und beliebige Referenzen $R_0 \subset I \times \mathbb{R}$ stets eindeutig lösbar.

5.1.1 Lagrange-Interpolation

Allgemeine Referenz aus Stützstellen x_i , $i = 0, \dots, n$, mit Stützwerten y_i

$$R = \{(x_i, y_i) \mid a \leq x_i \leq b, i = 0, \dots, n, \text{ und } x_i \neq x_j \text{ für } i \neq j\}.$$

Ansatz des Lagrange-Interpolationspolynoms

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \varphi_k(x), \quad \varphi_k(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

$\varphi_k(x) = L_n^{(k)}(x)$ Lagrange-Basispolynome, Knotenpunktpolynome, Lagrange-Terme.

Die Basispolynome genügen der Bedingung

$$\varphi_k(x_i) = \delta_{ik}, \quad \delta_{ik} \text{ Kronecker-Symbol.}$$

Damit ist einfach nachzurechnen, dass das **Lagrange-Interpolationspolynom**

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \frac{x - x_i}{x_k - x_i},$$

höchstens n -ten Grades ist und die Bedingung $L_n(x_j) = y_j$ erfüllt, also das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom darstellt.

(5.2) Satz Interpolationsfehler

Sei $f(x)$ $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar auf dem Intervall $I = [a, b]$. Das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom vom Grad $\leq n$ zur Referenz R ist $L_n(x)$.

Dann existiert eine Stelle $\xi \in \text{int}(x_0, x_1, \dots, x_n) = I_1 \subset I$, so dass für den Interpolationsfehler (Restglied der Interpolation) gilt

$$R_n(x) = f(x) - L_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n).$$

(5.3) Satz Eigenschaften der Lagrange-Basispolynome

$$(1) \quad 1 = \sum_{k=0}^n \varphi_k(x) \leq \sum_{k=0}^n |\varphi_k(x)|.$$

$$(2) \quad \sum_{k=0}^n \varphi_k(0) x_k^j = \begin{cases} 1 & \text{für } j = 0, \\ 0 & \text{für } j = 1, 2, \dots, n, \\ (-1)^n x_0 \cdot \dots \cdot x_n & \text{für } j = n + 1. \end{cases}$$

(3) Die Polynome $\varphi_k(x)$ bilden ein Orthogonalsystem und damit eine Basis in \mathcal{P}_n mit dem Skalarprodukt

$$(P, Q) = \sum_{i=0}^n P(x_i) Q(x_i), \quad \text{d. h. } (\varphi_k, \varphi_j) = \sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) \varphi_j(x_i) = \delta_{kj}.$$

(4) Das Lagrange-Interpolationspolynom $L_n(x)$ für äquidistante Stützstellen basiert auf den Beziehungen

$$\begin{aligned} x_i &= x_0 + ih, \quad x = x_0 + th, \quad h > 0, \\ \varphi_k(x) &= \varphi_k(x_0 + th) = l_k(t) = \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n (t-i), \\ L_n(x) &= \sum_{k=0}^n y_k l_k\left(\frac{x-x_0}{h}\right) = \sum_{k=0}^n y_k \frac{(-1)^{n-k}}{k!(n-k)!} \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n \left(\frac{x-x_0}{h} - i\right). \end{aligned}$$

5.1.2 Newton-Interpolation**Lineare und quadratische Interpolation**

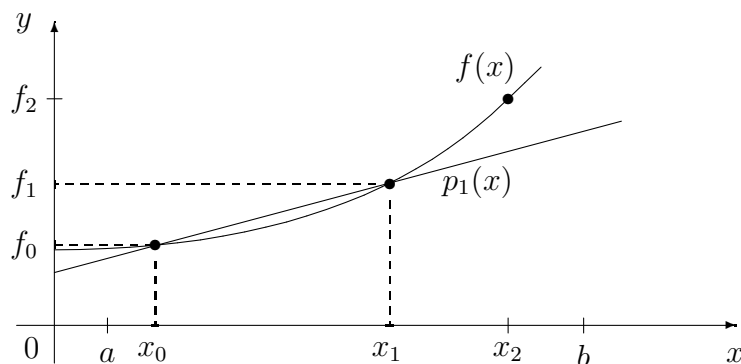
Geometrisch bedeutet dies die Konstruktion einer Geraden durch zwei Punkte bzw. einer quadratischen Parabel durch drei.

(1) Lineare Interpolation: 2 Stützstellen $x_0 < x_1$ mit $f_i = f(x_i)$.

Die Geradengleichung hat die Gestalt

$$p_1(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Abb. 5.1 Lineares Interpolationspolynom durch 2 Punkte (x_i, f_i) , $i = 0, 1$



- (2) Quadratische Interpolation: 3 Stützstellen $x_0 < x_1 < x_2$ mit $f_i = f(x_i)$.
Die Gleichung der quadratischen Parabel hat die Gestalt

$$p_2(x) = f_0 + \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + \frac{\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} - \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}(x - x_0)(x - x_1).$$

In diesen Darstellungen verwenden wir Differenzen und dividierte Differenzen (Differenzenquotienten).

Wir notieren die Beziehungen für äquidistante Stützstellen.

Sei $x_i = x_{i-1} + h$, $f_i = f(x_i)$.

(5.4) Definition Vorwärtsdifferenzen Δ^k bzw. Rückwärtsdifferenzen ∇^k

$$\begin{aligned}\Delta^0 f(x) &= f(x), \\ \Delta^1 f(x) &= \Delta f(x) = f(x + h) - f(x), \quad h > 0, \\ \Delta^n f(x) &= \Delta(\Delta^{n-1} f(x)), \\ \nabla^0 f(x) &= f(x), \\ \nabla^1 f(x) &= \nabla f(x) = f(x) - f(x - h) = \Delta f(x - h), \\ \nabla^n f(x) &= \nabla(\nabla^{n-1} f(x)).\end{aligned}$$

Dann gilt $\nabla^k f_i = \Delta^k f_{i-k}$.

(5.5) Definition Dividierte Differenzen

$$f[x_1, x_0] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

heißt 1. dividierte Differenz von x_1 und x_0 bezüglich f .

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{f[x_2, x_1] - f[x_1, x_0]}{x_2 - x_0}$$

heißt 2. dividierte Differenz von x_2, x_1, x_0 bezüglich f .

Sei die k -te dividierte Differenz bereits definiert. Dann ist

$$f[x_{k+1}, x_k, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_{k+1}, \dots, x_2, x_1] - f[x_k, \dots, x_1, x_0]}{x_{k+1} - x_0}$$

$(k + 1)$ -te dividierte Differenz von x_{k+1}, \dots, x_1, x_0 bezüglich f .

Dividierte Differenzen sind symmetrisch in Bezug auf die Argumente.

Sie werden auch **Steigungen** genannt. Es gilt ebenfalls

$$f[x_{k+1}, x_k, \dots, x_1, x_0] = \frac{f[x_{k+1}, x_{k-1}, \dots, x_2, x_1, x_0] - f[x_k, \dots, x_1, x_0]}{x_{k+1} - x_k}.$$

Um die dividierten Differenzen $f[x_0] = f(x_0), f[x_1, x_0], \dots, f[x_{k+1}, \dots, x_1, x_0]$ systematisch und geschickt zu berechnen, bietet sich folgendes Schema an.

Schema der dividierten Differenzen ($n = 3$)

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & x_0 & | & f_0 & \\
& & & x_1 - x_0 & | & f[x_1, x_0] & \\
& x_2 - x_0 & & x_1 & | & f_1 & f[x_2, x_1, x_0] \\
x_3 - x_0 & & x_2 - x_1 & & | & f[x_2, x_1] & f[x_3, x_2, x_1, x_0] \\
& x_3 - x_1 & & x_2 & | & f_2 & f[x_3, x_2, x_1] \\
& & x_3 - x_2 & & | & f[x_3, x_2] & \\
& & & x_3 & | & f_3 &
\end{array}$$

(5.6) Folgerung Für das lineare und quadratische Interpolationspolynom erhält man mit den dividierten Differenzen die Darstellungen

$$\begin{aligned}
p_1(x) &= f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0), \\
p_2(x) &= f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1).
\end{aligned}$$

(5.7) Satz Newton-Interpolationspolynom

(1) Das Polynom höchstens n -ten Grades

$$\begin{aligned}
N_n(x) &= f(x_0) + \sum_{j=1}^n f[x_j, x_{j-1}, \dots, x_0](x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{j-1}) \\
&= \sum_{k=0}^n \delta^k f_0 \omega_k(x), \quad \omega_k(x) = \prod_{i=0}^{k-1} (x - x_i),
\end{aligned}$$

heißt Newton-Interpolationspolynom.

$\omega_k(x)$ sind die Newton-Basispolynome, Knotenpunktpolynome oder Newton-Terme, $f[x_k, \dots, x_1, x_0] = \delta^k f_0$ die k -te dividierte Differenz.

(2) $N_n(x)$ löst die Interpolationsforderungen $N_n(x_i) = f(x_i)$, $i = 0, \dots, n$, und stellt das eindeutig bestimmte Interpolationspolynom der Interpolationsaufgabe (IA1) dar.

(3) Der Interpolationsfehler lautet

$$\begin{aligned}
R_n(x) &= f(x) - N_n(x) \\
&= f[x, x_n, x_{n-1}, \dots, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n) \\
&= \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n).
\end{aligned}$$

mit $\xi \in (x_0, x_n)$, vorausgesetzt $f \in \mathcal{C}^{n+1}[a, b]$.

(5.8) Folgerung Fehlerabschätzung

$$|R_n(x)| = |f(x) - N_n(x)| \leq \frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!} |(x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)|.$$

(5.9) Beispiel Newton-InterpolationspolynomReferenz mit 4 Punkten ($n = 3$).

x_i	1	3	4	6
y_i	4	6	4	12

Schema der dividierten Differenzen

		1		4		
		2			1	
	3		3		6	-1
5		1			-2	$\frac{3}{5}$
	3		4		4	2
		2			4	
		6		12		

Interpolationsformel

$$\begin{aligned}
N_3(x) &= f(x_0) + f[x_1, x_0](x - x_0) \\
&\quad + f[x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1) + f[x_3, x_2, x_1, x_0](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \\
&= 4 + 1(x - 1) - 1(x - 1)(x - 3) + \frac{3}{5}(x - 1)(x - 3)(x - 4) \quad (\text{obere Zeile}) \\
&= 12 + 4(x - 6) + 2(x - 6)(x - 4) + \frac{3}{5}(x - 6)(x - 4)(x - 3) \quad (\text{untere Zeile}) \\
&= \frac{3}{5}x^3 - \frac{29}{5}x^2 + \frac{82}{5}x - \frac{36}{5} \quad (\text{inverses HS}).
\end{aligned}$$

5.1.3 Hermite-Interpolation

Es handelt dabei um eine **verallgemeinerte Polynominterpolation** mit der Einbeziehung von Funktions- und Ableitungswerten.

- Grundintervall I
 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und (bekannte oder unbekannte) reelle Funktion $f \in \mathcal{C}^\alpha(I)$, $\alpha \geq 0$.
- Referenz R mit Stützstellen x_i und Stützwerten y_i sowie weiteren in Form von Ableitungswerten.
- Interpolationspolynom vom Grad $\leq m$ (Ansatz)

$$p_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m, \quad a_i \in \mathbb{R}.$$

- Interpolationsforderung (Interpolationsbedingung)

$$p_m(x_0) = f(x_0), \quad p'_m(x_0) = f'(x_0), \dots, \quad p_m^{(\alpha_0-1)}(x_0) = f^{(\alpha_0-1)}(x_0),$$

$$p_m(x_1) = f(x_1), \quad p'_m(x_1) = f'(x_1), \dots, \quad p_m^{(\alpha_1-1)}(x_1) = f^{(\alpha_1-1)}(x_1),$$

...

$$p_m(x_n) = f(x_n), \quad p'_m(x_n) = f'(x_n), \dots, \quad p_m^{(\alpha_n-1)}(x_n) = f^{(\alpha_n-1)}(x_n).$$

Dabei sind $\alpha_i \geq 1$ Vielfachheiten, $m = -1 + \sum_{i=0}^n \alpha_i$, $\alpha = -1 + \max_{i=0(1)n} \alpha_i$.

Somit stimmt die Anzahl der unbekannten Koeffizienten im Ansatz mit der Anzahl der Bedingungen überein.

• **Interpolationsaufgabe (IA2)**

Gesucht sind Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_m , so dass die Interpolationsforderung erfüllt ist.

Mit der Vorgabe von Ableitungswerten werden diese als Steigungen im Schema der dividierten Differenzen berücksichtigt. Das führt dann dort auf Initialisierungsanteile, wo die entsprechenden Stützstellen mehrfach aufgelistet werden. Deshalb ist die Definition der dividierten Differenzen zu erweitern auf die mit mehrfachen Argumenten. Am besten zeigen wir dies für eine Referenz.

Bestimmung des Hermite-Interpolationspolynoms

Gegeben seien die Werte

$$\begin{array}{c|c} x_0 & f(x_0), f'(x_0), f''(x_0) \\ x_1 & f(x_1), f'(x_1) \end{array}$$

Die Vielfachheiten sind $\alpha_0 = 3$, $\alpha_1 = 2$, somit $m = 4$. Zu berechnen ist $H_4(x)$.

Entsprechend den Vielfachheiten ist das Ausgangsschema der dividierten Differenzen so zu ergänzen, dass die Paare (x_i, f_i) α_i -mal aufzunehmen sind und dazu die entsprechenden Steigungen

$$f[x_i, x_i] = f'(x_i), f[x_i, x_i, x_i] = \frac{f''(x_i)}{2!}, \dots, f[\underbrace{x_i, \dots, x_i}_{\alpha_i\text{-mal}}] = \frac{f^{(\alpha_i-1)}(x_i)}{(\alpha_i-1)!}.$$

(1) Ausgangsschema der dividierten Differenzen (Initialisierung)

$$\begin{array}{cc|c} & x_0 & f_0 \\ -- & & f[x_0, x_0] \\ -- & x_0 & f_0 \quad f[x_0, x_0, x_0] \\ -- & & f[x_0, x_0] \\ & x_0 & f_0 \\ & x_1 & f_1 \\ -- & & f[x_1, x_1] \\ & x_1 & f_1 \end{array}$$

mit den speziellen dividierten Differenzen

$$f[x_0, x_0] = \frac{f'(x_0)}{1!}, f[x_1, x_1] = \frac{f'(x_1)}{1!}, f[x_0, x_0, x_0] = \frac{f''(x_0)}{2!}.$$

Die erweiterte Stützstellenfolge ist x_j , $j = 0, 1, \dots, 4$ (bei gleicher Bezeichnung der Größen).

5.1.4 Allgemeine Referenz

Das Aufstellen des Schemas der dividierten Differenzen im Fall vorhandener Ableitungswerte verlangt die entsprechende Wiederholung der Stützstellen. Oben wurde dies demonstriert.

Günstiger ist es, eine allgemeine Stützstellenfolge zu konstruieren, die diese Wiederholungen enthält. Die Bezeichnung x_i für die Stützstellen behalten wir bei. Mit der Neuindizierung vergrößert sich der maximale Index n .

(5.11) Definition Allgemeine Referenz für $f(x)$

Es ist die Darstellung der erweiterten Referenz in Form von Tripeln.

$$R_H = \{(x_i, d_i, \mu_i(f)), i = 0, 1, \dots, n, x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n\},$$

$$\text{mit } d_i = \max(j : x_i = x_{i-j}), i = 0, 1, \dots, n,$$

$$\mu_i(f) = f^{(d_i)}(x_i), \mu_i : C^n[a, b] \rightarrow \mathbb{R}.$$

(5.12) Beispiel Konstruktion der Referenz R_H

$$\left. \begin{array}{l} f(1) = 2, \quad f'(1) = 6, \quad f''(1) = 0 \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = -10 \end{array} \right| \begin{array}{l} x_0 = x_1 = x_2 = 1. \\ x_3 = x_4 = 0, \quad n = 4. \end{array}$$

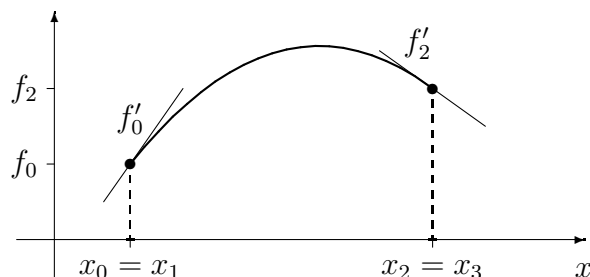
$x_i, i = 0, 1, 2, 3, 4 = n$	1	1	1	0	0
d_i	0	1	2	0	1
$\mu_i(f)$	2	6	0	1	-10
	$f(x_0)$	$f'(x_1)$	$f''(x_2)$	$f(x_3)$	$f'(x_4)$

Die Interpolationsaufgabe besteht im Auffinden eines Polynoms $p(x) \in \mathcal{P}_n$ mit $\mu_i(p) = \mu_i(f)$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Spezialfälle

1. Lagrange- bzw. Newton-Interpolation mit $x_0 < x_1 < \dots < x_n$, $d_i = 0$.
2. Taylor-Interpolation mit $x_0 = x_1 = \dots = x_n$, $d_i = i$.
3. Hermite-Interpolation mit $x_0 = x_1 < x_2 = x_3 < \dots < x_{n-1} = x_n$, $d_{2k} = 0, d_{2k+1} = 1$.
4. Kubische Hermite-Interpolation mit $x_0 = x_1 < x_2 = x_3$, $n = 3$.

Abb. 5.2 Kubische Hermite-Interpolation bei einem Intervall



Mit dem letzten Fall machen wir den Übergang zum nächsten Abschnitt.

5.1.5 Kubische Hermite-Basis

Betrachten wir die allgemeine Referenz R_H im Fall $n = 3$, $x_0 = x_1 < x_2 = x_3$. Mit der Auswahl von entsprechenden Funktions- und Ableitungswerten kann man sogenannte Standardpolynome 3. Grades definieren.

(5.13) Definition Kubische Hermite-Polynome

$H_3^{(i)}(x) \in \mathcal{P}_3$, $i = 0, 1, 2, 3$, $[H_3^{(i)}(x_k)]' = [H_3^{(i)}(x)]'|_{x=x_k}$, wobei

$$H_3^{(0)}(x_0) = \mathbf{1}, \quad [H_3^{(0)}(x_0)]' = 0, \quad H_3^{(0)}(x_2) = 0, \quad [H_3^{(0)}(x_2)]' = 0,$$

$$H_3^{(1)}(x_0) = 0, \quad [H_3^{(1)}(x_0)]' = \mathbf{1}, \quad H_3^{(1)}(x_2) = 0, \quad [H_3^{(1)}(x_2)]' = 0,$$

$$H_3^{(2)}(x_0) = 0, \quad [H_3^{(2)}(x_0)]' = 0, \quad H_3^{(2)}(x_2) = \mathbf{1}, \quad [H_3^{(2)}(x_2)]' = 0,$$

$$H_3^{(3)}(x_0) = 0, \quad [H_3^{(3)}(x_0)]' = 0, \quad H_3^{(3)}(x_2) = 0, \quad [H_3^{(3)}(x_2)]' = \mathbf{1}.$$

(5.14) Beispiel Kubische Hermite-Polynome auf dem Intervall $[0,1]$

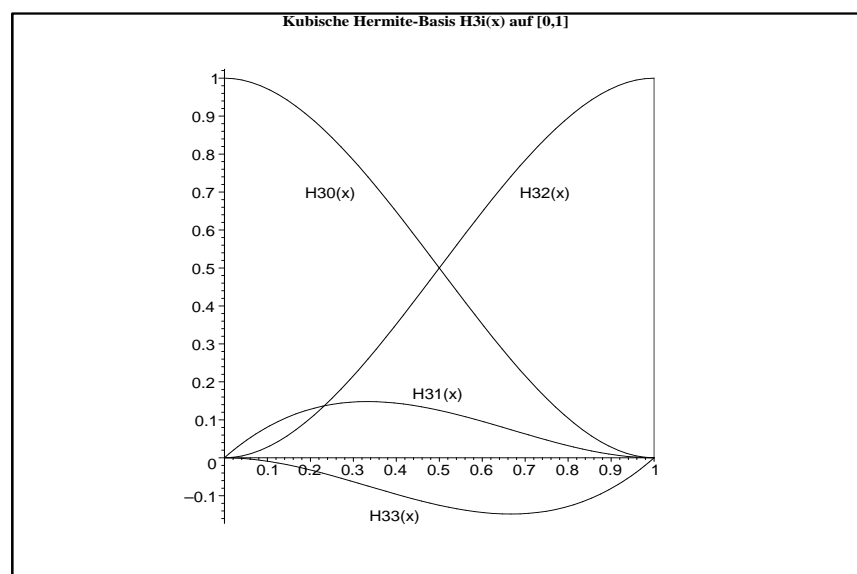
$$x_0 = x_1 = 0,$$

$$x_2 = x_3 = 1,$$

$$H_3^{(0)}(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1, \quad H_3^{(2)}(x) = -2x^3 + 3x^2, \quad H_3^{(0)}(x) + H_3^{(2)}(x) = 1,$$

$$H_3^{(1)}(x) = x^3 - 2x^2 + x, \quad H_3^{(3)}(x) = x^3 - x^2, \quad H_3^{(1)}(x) + H_3^{(3)}(x) = 2x(x - \frac{1}{2})(x - 1).$$

Abb. 5.3 Die 4 kubischen Hermite-Basispolynome auf dem Intervall $[0,1]$



Analog kann man die kubischen Hermite-Polynome $H_3^{(i)}(x)$, $i = 0, 1, 2, 3$, auf dem Intervall $[a, b]$ angeben. Diese sind linear unabhängig und bilden somit eine Basis im Raum \mathcal{P}_3 , die sogenannte **kubische Hermite-Basis**. Damit gilt

$$p(x) = f(a)H_3^{(0)}(x) + f'(a)H_3^{(1)}(x) + f(b)H_3^{(2)}(x) + f'(b)H_3^{(3)}(x).$$

Diese Basis wird bei der intervallweisen Hermite-Interpolation, also bei der Spline-Interpolation angewandt. Das Zusammensetzen von solchen Teilstücken gestattet die Konstruktion einer stetigen und differenzierbaren Gesamtfunktion.

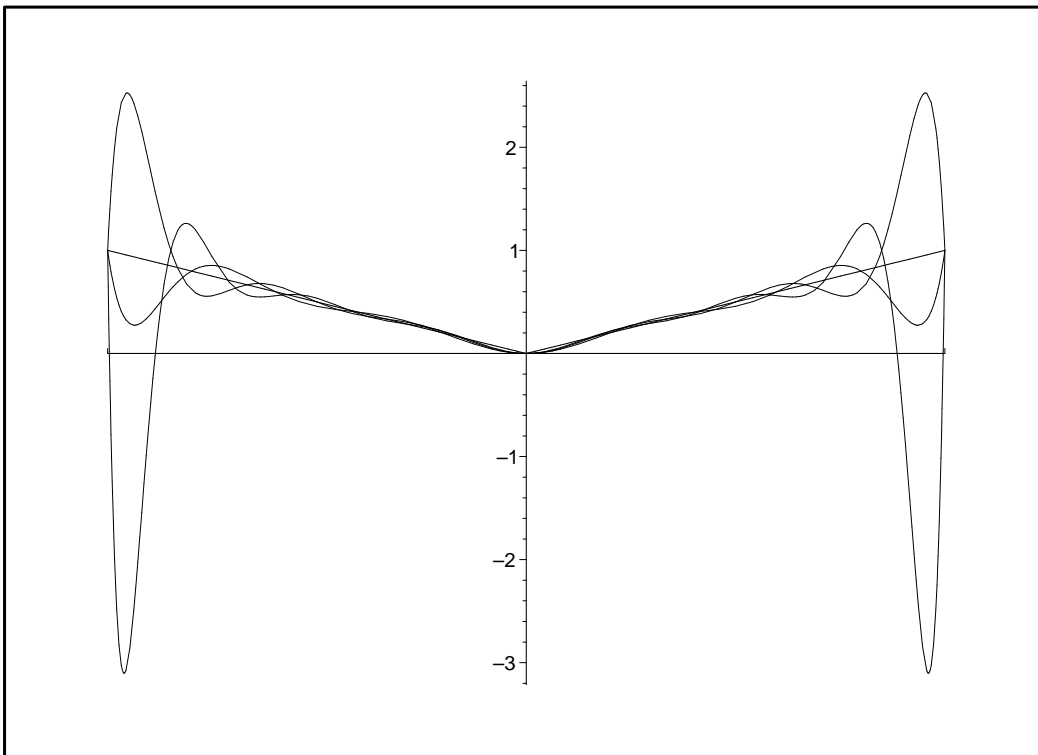
5.2 Fehler und Konvergenz

(1) Das Beispiel von Bernstein

Schon Anfang des 20. Jahrhunderts wurde die Frage der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz von Interpolationspolynomen gegen die interpolierte Funktion für den Fall, dass die Anzahl der Stützstellen anwächst, ausführlich untersucht.

Für die stetige Funktion $f(x) = |x|$ konvergiert die Folge der äquidistanten Interpolationspolynome auf $[-1, 1]$ in keinem Punkt außer den Randpunkten ± 1 .

Abb. 5.4 Interpolation von $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, durch Polynome mit äquidistanten Stützstellen (3 Fälle)



Maple-Anweisungen dazu

```
> restart;
> with(plots):

> ffejer:=x->abs(x);  Intervall:=-1..1:
  r:=3;
> a:=op(1,Intervall): b:=op(2,Intervall):
> for i from 1 to r do
>   n:=8+2*i;
>   x:=seq(a+(b-a)/n*k,k=0..n);
>   y:=map(ffejer,x);
>   pol.i:=unapply(interp(x,y,t),t);
> od:
> plot([ffejer,seq(pol.i,i=1..r)],-1..1,thickness=[2,1$r],
      xtickmarks=[a,b],color=black);
```

(2) Bernstein-Polynome

Im Jahre 1912 bewies Sergei Natanowitsch Bernstein, dass es zu jeder stetigen Funktion f auf einem abgeschlossenen, beschränkten Intervall eine Folge von Polynomen gibt, die gleichmäßig gegen f konvergiert.

Für das Intervall $[0,1]$ lässt sich eine solche Folge explizit angeben.

Die Folge der Bernstein-Polynome $\{B_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$

$$B_n f(x) = B_n(x) = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

hat für die stetige Funktion f die Eigenschaft

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - B_n\|_{\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{x \in [0,1]} |f(x) - B_n(x)| = 0.$$

Die Bernstein-Polynome interpolieren **nicht** in den Stützstellen $\frac{k}{n}$, $k = 0, 1, \dots, n$, sie approximieren die Funktion f nur. Wegen ihrer guten Formerhaltungseigenschaften (Invarianz unter affinen Abbildungen) spielt diese polynomiale Approximation stetiger Funktionen eine große praktische Rolle. Naheliegend war daher die Fragestellung, ob auch die Folge der Interpolationspolynome zu äquidistanten Stützstellen punktweise oder gar gleichmäßig konvergiert. Mit dem Beispiel aus Abschnitt (1) beantwortete Bernstein selbst diese Frage negativ.

(3) Das Beispiel von Runge

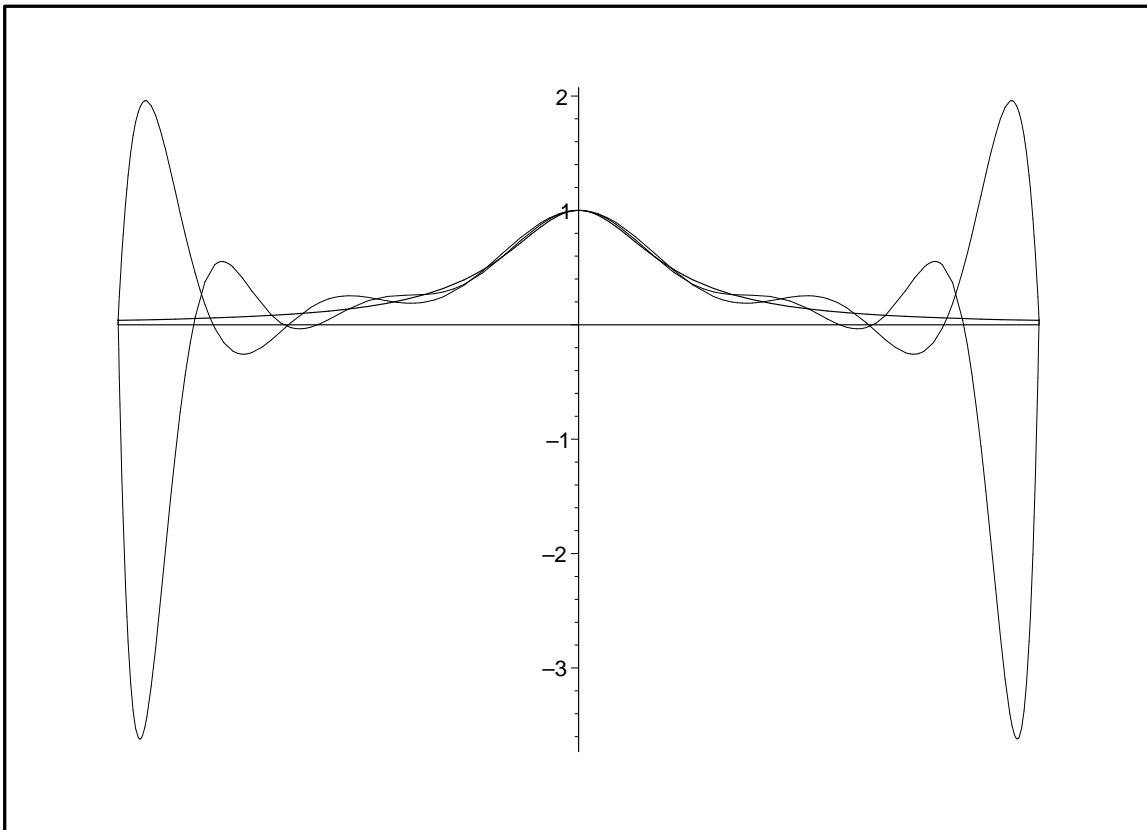
Von Carl D.T. Runge (1856-1927) stammt der Beweis, dass die Interpolationspolynome p_n zu $n+1$ äquidistant verteilten Stützstellen für die unendlich oft differenzierbare Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

auf dem Intervall $[-5, 5]$ nur auf dem Teilstück $I = [-3.63\dots, 3.63\dots]$ punktweise gegen f konvergieren und außerhalb von I in jedem Punkt, außer den Randpunkten -5 und 5 , divergieren.

Dieses Beispiel wird auch heute noch oft benutzt, um das mögliche ungünstige Verhalten von Interpolationspolynomen hohen Grades zu demonstrieren.

Abb. 5.5 Das Beispiel von Runge mit $f(x) = 1/(1+x^2)$, $x \in [-5, 5]$, mit $n = 10$ bzw. 12 Interpolationsstützstellen



Maple-Anweisungen dazu

```
> restart;
> with(plots):

> r:=3:
> frunge:=x->1/(1+x^2);
> for i from 2 to r do
>   n:=6+2*i;
>   x:=seq(-5+10/n*k,k=0..n);
>   y:=map(frunge,x);
>   pol.i:=unapply(interp(x,y,t),t);
> od:
> plot([frunge,pol.2,pol.3],-5..5,thickness=[2,1,1],
       xtickmarks=[-5,5],color=black);
```

Tatsächlich wurde schon 1914 von Bernstein und Faber bewiesen, dass es zu jeder Stützstellenfolge eine stetige Funktion gibt, für welche die Folge der Interpolationspolynome nicht punktweise konvergiert.

Für die Grundtypen der Interpolation einer Funktion ist der **Interpolationsfehler**

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)(x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_n)$$

mit $\xi \in I=[a, b]$, vorausgesetzt $f \in C^{n+1}(I)$.

Man hofft, dass mit wachsendem n bei hinreichend glatter Funktion das Interpolationspolynom $p_n(x)$ immer genauer wird, d.h.

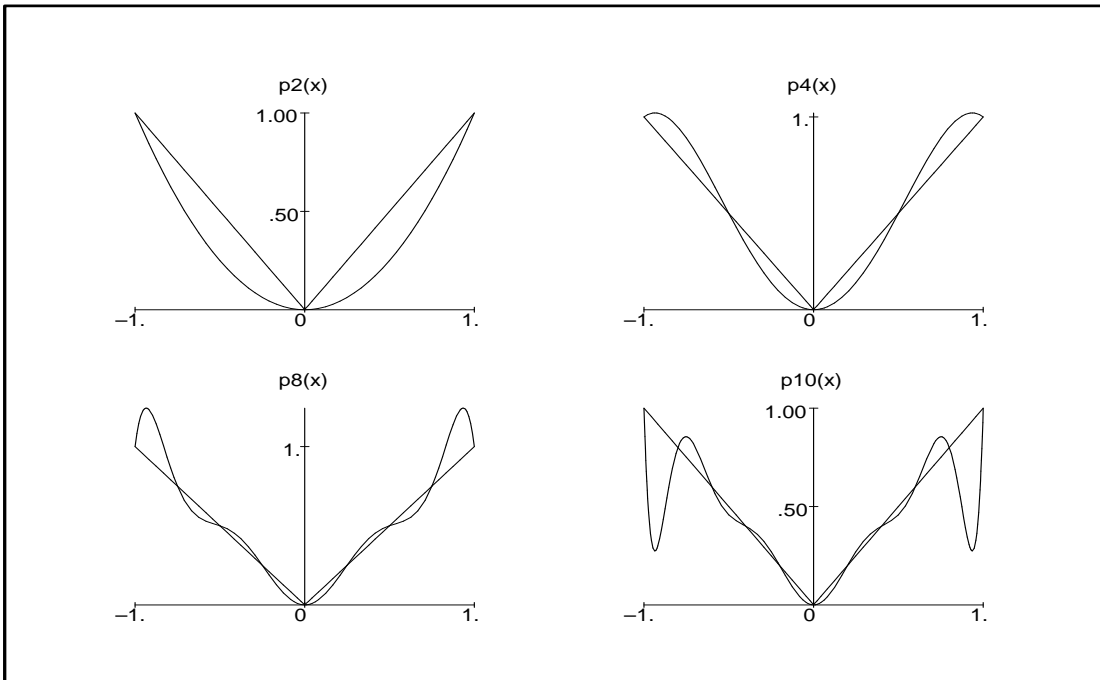
$$\|f - p_n\|_\infty = \max_x |f(x) - p_n(x)| \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Dabei sind natürlich einige Aspekte zu berücksichtigen.

- Glattheit der zu interpolierenden Funktion und Beschränktheit ihrer Ableitungen,
- Endlichkeit des Intervalls $[a, b]$ mit Stützstellen x_i ,
- Verteilung der Stützstellen x_i verbunden mit der Kondition der Interpolation.

(5.15) Beispiel $f(x) = |x|$, $x \in [-1, 1]$, $x_0 = -1$, $x_n = 1$, x_i äquidistant.

Abb. 5.6 $f(x) = |x|$ und ausgewählte Interpolationspolynome auf $[-1, 1]$



Interpolationspolynome

$$n = 2, \quad p_2(x) = x^2,$$

$$n = 4, \quad p_4(x) = -\frac{4}{3}x^4 + \frac{7}{3}x^2,$$

$$n = 8, \quad p_8(x) = -\frac{1024}{63}x^8 + \frac{1408}{45}x^6 - \frac{172}{9}x^4 + \frac{533}{105}x^2,$$

$$n = 10, \quad p_{10}(x) = \frac{390625}{5184}x^{10} - \frac{1015625}{6048}x^8 + \frac{221875}{1728}x^6 - \frac{13375}{324}x^4 + \frac{1627}{252}x^2.$$

Weiter gilt $|f(x) - p_{20}(x)| \approx 100$ für x nahe Eins.

Ein Grund für das wachsende oszillierende Verhalten der Interpolationspolynome ist, dass die Funktion im Punkt 0 keine Ableitung besitzt. Das ist aber nicht die alleinige Ursache.

Man bemerke, dass in der Mitte des Intervalls eine gute Näherung vorliegt, während zu den Rändern hin die Approximation immer schlechter wird. Diese Eigenschaft wird **Gibbsscher** oder **Rungescher Effekt** bzw. Phänomen genannt.

(5.16) Beispiel $f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$, $x \in [-1, 1]$, $x_0 = -1$, $x_n = 1$, x_i äquidistant.

Trotz Glattheit der Funktion tritt auch hier bei äquidistanten Stützstellen der Gibbsche Effekt auf. Also ist eine andere Stützstellenverteilung zu wählen.

5.2.1 Konvergenzsätze

Entscheidend bei der Abschätzung des Interpolationsfehlers und damit der Konvergenz sind die Beschränktheit der Ableitungen der zu interpolierenden Funktion sowie die Wahl der Stützstellen.

(5.17) Satz Konvergenz

Ist die Funktion f aus $\mathcal{C}^\infty(I)$, $I=[a, b]$, und genügen ihre sämtlichen Ableitungen der Bedingung $|f^{(n)}(x)| \leq M$, $x \in I$, $n = 1, 2, \dots$, so gilt für die Interpolationspolynome $p_n(x)$ mit zugehöriger Referenz

$$\forall x \in I \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |f(x) - p_n(x)| = 0.$$

Beweis Man betrachte den Interpolationsfehler $R_n(x)$ mit $|x - x_i| \leq b - a$ und beachte $\lim_{n \rightarrow \infty} (b - a)^{n+1} / (n + 1)! = 0$. \square

(5.18) Bemerkung (a) Die obige Konvergenz ist auch gleichmäßig in der Norm.

(b) Die Funktionen $\sin(x)$, $\cos(x)$, e^x , ... haben auf $[a, b]$ gleichmäßig beschränkte Ableitungen beliebig hoher Ordnung.

(c) $f \in \mathcal{C}^\infty[a, b]$ ist oft nicht erfüllt.

(d) $f \in \mathcal{C}^\infty$ kann ersetzt werden durch die Voraussetzung, dass f eine ganze Funktion ist, d. h. darstellbar für jedes x als konvergente Potenzreihe

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

(e) Der Weierstraßsche Approximationssatz gilt für eine stetige Funktion.

Warum werden hier solche scharfen Bedingungen an die Glattheit gestellt?

Die ungünstige Variante, die an zwei Beispielen schon demonstriert wurde, beschreibt folgender Satz.

(5.19) Satz G. FABER

Zu jeder Stützstellenfolge $\{R_n\}$ lässt sich eine auf $[a, b]$ stetige Funktion f angeben, für die Folgendes nicht gilt.

$$\max_{x \in [a, b]} |f(x) - p_n(x)| \rightarrow 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

(5.20) Beispiel

$[a, b] = [-1, 1]$, $R_n = \{x_i\}_{i=0}^n = \{-1, -1 + \frac{2}{n}, -1 + \frac{4}{n}, \dots, 1 - \frac{2}{n}, 1\}$, x_i äquidistant.

Für diese R_n ist $f(x) = |x|$ eine solche Funktion.

Mehr noch. Nach S.N. Bernstein gilt sogar:

Für **kein** $x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$ gilt $|x| - p_n(x) \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

Nun gibt es aber auch eine günstige Situation für stetige Funktionen.

Aus dem Weierstraßschen Approximationssatz und dem Satz von Tschebyscheff über Alternanten (Punktfolge mit Polynom, das “sich um die Funktion legt”) folgt eine positive Antwort.

(5.21) Satz J. MARCINKIEWICZ, J.M. JANKOWSCY

Zu jeder stetigen Funktion f auf $[a, b]$ gibt es mindestens eine Folge von Stützstellen $\{R_n\}$, so dass die zugehörigen Interpolationspolynome p_n für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen f streben.

Das Problem ist somit die Angabe solcher Folgen, zumal für andere Stützstellenfolgen genau das Gegenteil eintreten kann.

(5.22) Satz Ist $f \in C^1[-1, 1]$, so konvergiert die Folge der Interpolationspolynome p_n mit der **Tschebyscheff-Referenz**, das sind die Stützstellen

$$x_i = -\cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right) \in (-1, 1), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

und zugehörigen Stützwerte für $n \rightarrow \infty$ gleichmäßig gegen f auf $[-1, 1]$.

(5.23) Bemerkung (a) Im Produktpolynom $\omega_{n+1}(x) = \prod_{i=0}^n (x - x_i)$, das in den “Randbereichen” des Intervalls zu starker Oszillation neigt, ist dort eine Verdichtung der Stützstellen vorzunehmen. Das gelingt mit der Tschebyscheff-Referenz.

(b) Für das Intervall $[a, b]$ sind die Stützstellen nach Transformation

$$x_i = \frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2} \cos\left(\frac{2i+1}{2n+2}\pi\right).$$

(c) Die Tschebyscheff-Stützstellen $-\cos((2i+1)\pi/(2n+2))$ sind die Nullstellen des Tschebyscheff-Polynoms $T_{n+1}(x)$.

(d) Die Tschebyscheff-Stützstellenfolge $\{x_i\}$ auf $[a, b]$ erfüllt für das Produktpolynom die Bedingung

$$\max_{x \in [a, b]} |\omega_{n+1}(x)| \rightarrow \min.$$

Man nennt diese auch **Minimax-Eigenschaft** der Tschebyscheff-Polynome.

6 Splinekurven

6.1 Splineinterpolation im \mathbb{R}^1

Das ist eine intervallweise Interpolation, wo man stückweise Polynome niedrigen Grades zu einer glatten Gesamtfunktion zusammensetzt.

- Grundintervall I
 $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ mit $-\infty < a < b < \infty$ und (bekannte oder unbekannte) reelle Funktion $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.
- Stützstellen x_k , Stützwerte y_k und Schrittweite $h_k = x_{k+1} - x_k$ sowie R_0 als **Referenz** mit $n + 1$ paarweise verschiedenen Stützstellen und den $n + 1$ zugehörigen Stützwerten. Falls eine Funktion $f(x)$ zu Grunde liegt, definiert man die Stützwerte i. Allg. gemäß $y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.
- Splinefunktion als zusammengesetztes Polynom $s(x) = s(x, R_0)$ vom Grad m ($m \geq 1$) mit folgenden Eigenschaften.
 - (a) $s(x)$ ist ein Polynom vom Grad $\leq m$ auf jedem der Teilintervalle, d.h. $s(x) \in \mathcal{S}_m(R_0)$ und

$$s(x) = s^{(k)}(x) = \alpha_{k0} + \alpha_{k1}x + \dots + \alpha_{km}x^m, \quad x \in [x_k, x_{k+1}],$$

(b) Glattheit $s(x) \in \mathcal{C}^{m-1}(I)$.

- Interpolationsforderung (Interpolationsbedingung)
 - (1) $s(x_k) = y_k = f(x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n$.
 - (2) An den inneren Punkten x_1, x_2, \dots, x_{n-1} ist $s(x)$ stetig differenzierbar bis zur Ordnung $m - 1$, d. h. für $k = 1, 2, \dots, n - 1$ gilt

$$\begin{aligned} s^{(k-1)}(x_k) &= s^{(k)}(x_k), \\ s^{(k-1)}(x_k)' &= s^{(k)}(x_k)', \\ &\dots \\ s^{(k-1)}(x_k)^{(m-1)} &= s^{(k)}(x_k)^{(m-1)}. \end{aligned}$$

- **Interpolationsaufgabe (IA3)**

Gesucht sind auf n Teilintervallen insgesamt $n(m + 1)$ Koeffizienten α_{kl} , $k = 0, 1, \dots, n - 1$, $l = 0, 1, \dots, m$, so dass die Interpolationsforderung erfüllt ist.

Zunächst stellt man fest, dass man für die $n(m + 1) = n + 1 + mn - 1$ Unbekannten nur $n + 1 + m(n - 1) = n + 1 + mn - m$ Interpolationsbedingungen (1)+(2) zur Verfügung hat. Damit hat $s(x)$ die $m - 1$ freien Parameter. Zwecks Eindeutigkeit sind diese durch zusätzliche Bedingungen zu binden.

- $m = 1$: kein freier Parameter, eindeutige Lösung als Polygonzug, linearer Spline,
- $m = 2$: 1 freier Parameter, quadratische Splines,
- $m = 3$: 2 freie Parameter, kubische Splines.

6.2 Einfache Typen von Splines

(1) Linearer Spline

Für $x \in [x_k, x_{k+1}]$ sei $s^{(k)}(x) = a_k + b_k(x - x_k)$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Die $2n$ Bedingungen sind

$$\text{Interpolationseigenschaft: } s^{(k)}(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad s^{(n-1)}(x_n) = f_n,$$

$$\text{Stetigkeit: } s^{(k)}(x_k) = s^{(k-1)}(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

Ergebnis: Newtonsche und lagrangesche Form auf Teilintervall mit

$$\begin{aligned} s^{(k)}(x) &= f_k + \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k), \\ &= \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} f_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} f_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

(2) Quadratische Splines

Für $x \in [x_k, x_{k+1}]$ sei $s^{(k)}(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Die $3n$ Bedingungen sind

$$\text{Interpolationseigenschaft: } s^{(k)}(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad s^{(n-1)}(x_n) = f_n,$$

$$\text{Stetigkeit: } s^{(k)}(x_k) = s^{(k-1)}(x_k), \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$\text{stetige Differenzierbarkeit: } s^{(k)}(x_k)' = s^{(k-1)}(x_k)', \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$s^{(0)}(x_0)' = m_0 \quad (m_0 \text{ gegeben oder approximiert}).$$

Anstelle der letzten Bedingung $s^{(0)}(x_0)' = m_0$ sind auch andere möglich. Sie werden auch Endbedingungen genannt, falls sie am Ende des untersuchten Bereichs definiert werden.

Andere Zusatzbedingungen sind

- $s^{(k)}(\bar{x}) = \bar{y}$, \bar{x} zusätzliche Stelle,
- $s^{(n-1)}(x_n)' = m_n$,
- $s^{(0)}(x_0)' = s^{(n-1)}(x_n)'$, Periodizität verbunden mit $f_0 = f_n$,
- $s^{(0)}(x_0)' = -s^{(n-1)}(x_n)'$, Antiperiodizität verbunden mit $f_0 = f_n$,
- $K(s) = \int_{x_0}^{x_n} \omega(x) [s''(x)]^2 dx \rightarrow \min$, $\omega(x) > 0$ Gewichtsfunktion,

damit wird die Gesamtkrümmung der Kurve minimal.

(6.1) Beispiel Gegeben sei die Referenz mit 4 Knoten ($n = 3$)

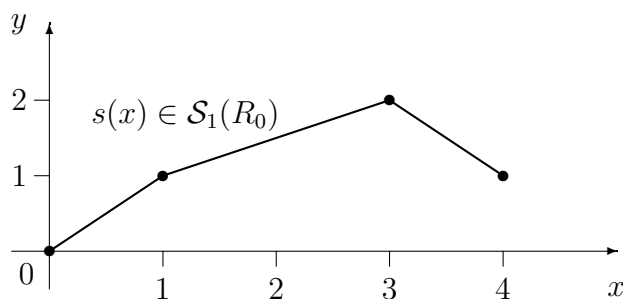
x_k	0	1	3	4
y_k	0	1	2	1

(a) Linearer Spline

Die stetige aus Geradenstücken zusammengesetzte Funktion ist

$$s(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in [0, 1], \\ 1 + \frac{1}{2}(x - 1) & \text{für } x \in [1, 3], \\ 2 - (x - 3) & \text{für } x \in [3, 4]. \end{cases}$$

Abb. 6.1 Lineare Splinefunktion



(b) Quadratischer Spline

Wir suchen die aus Parabelstücken zusammengesetzte differenzierbare Funktion.

Als modifizierten Ansatz für das Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ nehmen wir

$$s^{(k)}(x) = a_k + b_k x + c_k x^2, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Der Ansatz für das erste Parabelstück der Kurve ist $s^{(0)}(x) = a_0 + b_0 x + c_0 x^2$.

Aus den Bedingungen $s^{(0)}(0) = 0$ und $s^{(0)}(1) = 1$ folgt $a_0 = 0$ und $b_0 = 1 - c_0$. Damit ist

$$s^{(0)}(x) = (1 - c_0)x + c_0 x^2.$$

Außerdem gilt $\frac{d}{dx}s^{(0)}(1) = 1 + c_0$.

Der Ansatz für das zweite Parabelstück $s^{(1)}(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2$ führt mit den Bedingungen $s^{(1)}(1) = 1$, $s^{(1)}(3) = 2$ und $\frac{d}{dx}s^{(1)}(1) = 1 + c_0$ auf die Teillösung

$$s^{(1)}(x) = -(0.25 + 1.5c_0) + (1.5 + 2c_0)x - (0.25 + 0.5c_0)x^2.$$

Es ist $\frac{d}{dx}s^{(1)}(3) = -c_0$.

Mit dem Ansatz für das dritte Parabelstück $s^{(2)}(x) = a_2 + b_2 x + c_2 x^2$ und den Bedingungen $s^{(2)}(3) = 2$, $s^{(2)}(4) = 1$ und $\frac{d}{dx}s^{(2)}(3) = -c_0$ erhalten wird die Lösung

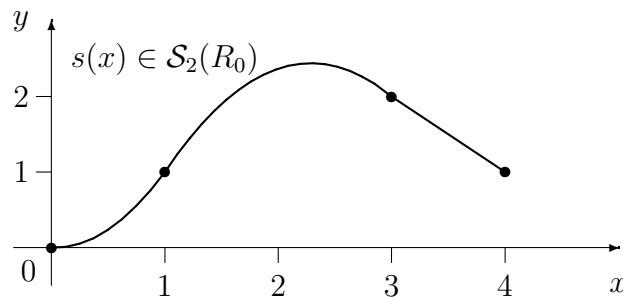
$$s^{(2)}(x) = (-7 + 12c_0) + (6 - 7c_0)x + (-1 + c_0)x^2.$$

Damit die Gesamtlösung eindeutig wird, muss eine weitere Bedingung gestellt werden, z. B. $\frac{d}{dx}s^{(0)}(0) = 0$.

Dann ist $c_0 = 1$ und

$$s(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \in [0, 1], \\ -\frac{7}{4} + \frac{7}{2}x - \frac{3}{4}x^2 & \text{für } x \in [1, 3], \\ 5 - x & \text{für } x \in [3, 4]. \end{cases}$$

Abb. 6.2 Quadratische Splinefunktion



Zum selben Ergebnis gelangt man auch mit dem Ansatz

$$s^{(k)}(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

für das Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$, der sofort die Lösung für den Koeffizienten a_k nach sich zieht, nämlich $a_k = f_k$.

Außerdem vereinfacht die Darstellung der Ableitung $s^{(k)}(x)' = b_k + 2c_k(x - x_k)$ die Berechnung von $s^{(k)}(x_k)' = b_k$, $s^{(k)}(x_{k+1})' = b_k + 2c_k h_k$. Wir erhalten die nicht ausmultiplizierte Form der Splinefunktion

$$s(x) = \begin{cases} 0 + 0(x - 0) + 1(x - 0)^2 & \text{für } x \in [0, 1], \\ 1 + 2(x - 1) - \frac{3}{4}(x - 1)^2 & \text{für } x \in [1, 3], \\ 2 - 1(x - 3) + 0(x - 3)^2 & \text{für } x \in [3, 4]. \end{cases}$$

Varianten zur Bestimmung der quadratischen Splinefunktion

(1) Lösung als LGS

$$\begin{aligned} s^{(k)}(x) &= a_k + b_k x + c_k x^2, \quad x \in [x_k, x_{k+1}], \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ s^{(k)}(x)' &= b_k + 2c_k x. \end{aligned}$$

Zusammenfassung der Interpolationsbedingungen

Bedingungen	Anzahl
$s^{(0)}(x_0)' = m_0$	1
$s^{(k)}(x_k) = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$	n
$s^{(k)}(x_{k+1}) = f_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$	n
$s^{(k-1)}(x_k)' = s^{(k)}(x_k)', \quad k = 1, 2, \dots, n-1$	$n-1$
	$\Sigma = 3n$

$$\begin{aligned}
s^{(k)}(x) &= s^{(k)}(x_k + th_k) = q^{(k)}(t) \\
&= f_k + h_k d_k t + (f_{k+1} - f_k - h_k d_k) t^2 \\
&= f_k + h_k d_k t + h_k \underbrace{\left(\frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} - d_k \right)}_{g_k \text{ (Steigung)}} t^2 \\
&= f_k + h_k d_k t + h_k (g_k - d_k) t^2.
\end{aligned}$$

Die Anwendung der Stetigkeitsbedingungen für die 1. Ableitung

$$s^{(k-1)}(x_k)' = s^{(k)}(x_k)', \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

liefert

$$\begin{aligned}
s^{(k-1)}(x_{k-1} + 1 \cdot h_{k-1})' &= s^{(k)}(x_k + 0 \cdot h_k)', \\
\frac{q^{(k-1)}(1)'}{h_{k-1}} &= \frac{q^{(k)}(0)'}{h_k}, \\
\frac{\tilde{b}_{k-1} + 2\tilde{c}_{k-1}}{h_{k-1}} &= \frac{\tilde{b}_k}{h_k}.
\end{aligned}$$

Das Einsetzen von \tilde{b}_k , \tilde{b}_{k-1} , \tilde{c}_{k-1} führt zu

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h_{k-1}} [h_{k-1} d_{k-1} + 2h_{k-1} (g_{k-1} - d_{k-1})] &= \frac{h_k d_k}{h_k}, \\
d_{k-1} + 2(g_{k-1} - d_{k-1}) &= d_k, \\
d_{k-1} + d_k &= 2g_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1.
\end{aligned}$$

Jetzt brauchen wir die Zusatzbedingung, die gemäß $s^{(0)}(x_0)' = f_0' = d_0$ den Wert d_0 bereitstellt. Damit können mit der aufsteigenden Rekursion

$$d_k = 2g_{k-1} - d_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

die fehlenden Größen d_k ermittelt werden. Endlich haben wir

$$\begin{aligned}
s^{(k)}(x) &= f_k + h_k d_k t + (g_k - d_k) h_k t^2, \quad t = \frac{x - x_k}{h_k}, \\
&= f_k + d_k (x - x_k) + \frac{g_k - d_k}{h_k} (x - x_k)^2.
\end{aligned}$$

Das Ergebnis zeigt große Ähnlichkeit zur Newton-Interpolationsformel mit der 1. und 2. Steigung, vergleichbar mit d_k bzw. $(g_k - d_k)/h_k$.

Andere Zusatzbedingungen sind auf ähnliche Weise zu behandeln, wobei bei Periodizität und Antiperiodizität mit $d_0 = \pm d_n$ für die Lösbarkeit der Interpolationsaufgabe eine Fallunterscheidung bez. n gerade/ungerade erforderlich ist, aber das ev. zu lösende LGS auch eine einfache Struktur hat.

6.3 Kubische Splines

(6.2) Definition Natürliche kubische Splinefunktion

Eine natürliche kubische Splinefunktion $s(x)$ zur Referenz R_0 , $y_k = f(x_k)$, ist eine reelle Funktion mit folgenden drei Eigenschaften.

- (a) $s(x)$ ist in jedem Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, n-1$, ein Polynom höchstens 3. Grades.
- (b) $s(x)$ ist in den Intervallen $(-\infty, x_0)$ und (x_n, ∞) ein Polynom 1. Grades.
Das heißt, dass die Krümmung von $s(x)$ an den Stellen x_0, x_n Null ist.
- (c) $s(x), s'(x), s''(x)$ sind stetig in \mathbb{R} und $s(x)$ interpoliert $f(x)$ an den $n+1$ Stützstellen x_k .

Darstellung des Splines $s(x)$

Sei $s(x) = s^{(k)}(x)$ für $x \in [x_k, x_{k+1}]$ mit

$$s^{(k)}(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Formulierung der Bedingungen mit $f_k = f(x_k)$

$$\begin{aligned} (a) \quad & s^{(k)}(x_k) = f_k, & k = 0, 1, \dots, n, \\ (b) \quad & s^{(k)}(x_k) = s^{(k-1)}(x_k), & k = 1, 2, \dots, n, \\ & s^{(k)}(x_k)' = s^{(k-1)}(x_k)', & k = 1, 2, \dots, n, \\ & s^{(k)}(x_k)'' = s^{(k-1)}(x_k)'', & k = 1, 2, \dots, n, \\ (c) \quad & s^{(0)}(x_0)'' = 0 & (2 \text{ Zusatzbedingungen}), \\ & s^{(n)}(x_n)'' = 0, \end{aligned}$$

und mit der zusätzlichen Funktion auf $[x_n, \infty)$

$$s^{(n)}(x) = a_n + b_n(x - x_n) + c_n(x - x_n)^2.$$

Die Funktion $s^{(n)}(x)$ wurde künstlich hinzugefügt, ohne die Aufgabenstellung zu verändern, so dass die Anzahl der unbekannten Koeffizienten gleich der Anzahl der Bedingungen $4n + 3$ beträgt.

Weitere Typen kubischer Splines

- Eingespannter Spline (clamped spline)

$$s'(x_0) = m_0, \quad s'(x_n) = m_n \quad (m_0, m_n \text{ gegeben}).$$

- Periodischer Spline

$$s'(x_0) = s'(x_n), \quad s''(x_0) = s''(x_n),$$

wobei $f_0 = f_n$ sinnvoll ist.

- Spline mit Not-a-knot-Bedingung

$s(x)$ ist auf $[x_0, x_1]$ und $[x_1, x_2]$ sowie $[x_{n-2}, x_{n-1}]$ und $[x_{n-1}, x_n]$ identisch.

Damit erweisen sich die Knoten x_1 und x_{n-1} als überflüssig ("keine eigentlichen Knoten").

Berechnung der Koeffizienten des natürlichen kubischen Splines

1. Rechte Seiten der Bestimmungsgleichungen

Seien die Schrittweiten $h_k = x_{k+1} - x_k$ definiert und

$$e_k = 3 \left(\frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} - \frac{f_k - f_{k-1}}{h_{k-1}} \right), \quad k = 1, 2, \dots, n-1.$$

2. Die Bestimmungsgleichungen für c_k sind

$$h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_k c_{k+1} = e_k, \quad k = 1, 2, \dots, n-1,$$

wobei $c_0 = c_n = 0$.

3. Die restlichen Splinekoeffizienten ergeben sich zu

$$a_k = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$b_k = \frac{1}{h_k}(f_{k+1} - f_k) - \frac{1}{3}(2c_k + c_{k+1})h_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$d_k = \frac{1}{3h_k}(c_{k+1} - c_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

4. Algorithmus zur Lösung der Bestimmungsgleichungen für c_k

Dies ist ein LGS mit einer diagonaldominanten Tridiagonalmatrix, das mit einer speziellen Variante des Gauß-Algorithmus gelöst werden kann.

$$(1) \quad \gamma_0 = 1, \quad \gamma_1 = 2(h_0 + h_1), \quad g_1 = e_1,$$

$$(2) \quad \gamma_k = 2(h_{k-1} + h_k) - \frac{h_{k-1}^2}{\gamma_{k-1}},$$

$$g_k = e_k - \frac{h_{k-1}}{\gamma_{k-1}}g_{k-1}, \quad k = 2, 3, \dots, n-1,$$

$$(3) \quad \gamma_n = 1, \quad g_n = 0,$$

$$(4) \quad c_n = 0,$$

$$c_k = \frac{1}{\gamma_k}(g_k - h_k c_{k+1}), \quad k = n-1, n-2, \dots, 1,$$

$$c_0 = 0.$$

Herleitung der Beziehungen für a_k, b_k, c_k, d_k

- Einsetzen in die Interpolationsbedingungen (a)-(c)

$$(a) \quad a_k = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

$$(b1) \quad a_k = a_{k-1} + b_{k-1}h_{k-1} + c_{k-1}h_{k-1}^2 + d_{k-1}h_{k-1}^3, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$(b2) \quad b_k = b_{k-1} + 2c_{k-1}h_{k-1} + 3d_{k-1}h_{k-1}^2,$$

$$(b3) \quad 2c_k = 2c_{k-1} + 6d_{k-1}h_{k-1},$$

$$(c) \quad c_0 = c_n = 0.$$

- Umstellung

$$(b3) \quad d_k = \frac{1}{3h_k}(c_{k+1} - c_k), \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

d_{k-1} in (b2), (b1) einsetzen,

$$(b2) \quad b_k = b_{k-1} + (c_k + c_{k-1})h_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$(b1) \quad b_k = \frac{1}{h_k}(a_{k+1} - a_k) - \frac{1}{3}(2c_k + c_{k+1})h_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1,$$

$$(c) \quad c_0 = c_n = 0.$$

- (b1) in (b2) einsetzen

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_k}(a_{k+1} - a_k) - \frac{1}{3}(2c_k + c_{k+1})h_k &= \frac{1}{h_{k-1}}(a_k - a_{k-1}) - \frac{1}{3}(2c_{k-1} + c_k)h_{k-1} \\ &\quad + (c_k + c_{k-1})h_{k-1}, \end{aligned}$$

$$h_{k-1}\left(c_k + c_{k-1} - \frac{2}{3}c_{k-1} - \frac{1}{3}c_k\right) + \frac{h_k}{3}(2c_k + c_{k+1}) = \frac{1}{h_k}(a_{k+1} - a_k) - \frac{1}{h_{k-1}}(a_k - a_{k-1}),$$

$$h_{k-1}c_{k-1} + 2(h_{k-1} + h_k)c_k + h_k c_{k+1} = \frac{3}{h_k}(f_{k+1} - f_k) - \frac{3}{h_{k-1}}(f_k - f_{k-1}) = e_k,$$

$$k = 1, 2, \dots, n-1,$$

$$c_0 = c_n = 0.$$

Lösung des Systems mit Tridiagonalmatrix $\Rightarrow c_k \Rightarrow d_k, b_k$.

(6.3) Satz Existenz und Eindeutigkeit der kubischen Splinefunktion

Zu paarweise verschiedenen Stützstellen x_k existiert stets genau eine natürliche kubische Splinefunktion.

(6.4) Satz HOLLADAY zur Optimalität kubischer Splines

In der Klasse $\mathcal{C}^2[x_0, x_n]$ der Funktionen $f(x)$, die auf der Referenz R_0 die Interpolationsbedingung $f(x_k) = y_k$, $k = 0, 1, \dots, n$, erfüllen, minimiert die natürliche kubische Splinefunktion $s(x)$ das Integral für die Gesamtkrümmung

$$\int_{x_0}^{x_n} [f''(x)]^2 dx.$$

Beweis

Die Aussage des Satzes heißt auch: Unter allen zweimal stetig differenzierbaren und interpolierenden Funktionen $f(x)$ hat die kubische natürliche Spline-Funktion $s(x)$ die geringste Biegeenergie, d. h.

$$\int_{x_0}^{x_n} [s''(x)]^2 dx \leq \int_{x_0}^{x_n} [f''(x)]^2 dx.$$

Dazu untersucht man den Ausdruck

$$\int_{x_0}^{x_n} [f''(x) - s''(x)]^2 dx$$

und verwendet die zusammengesetzte und partielle Integration für

$$\int_{x_0}^{x_n} \Delta''(x) s''(x) dx, \text{ wobei } \Delta(x) = s(x) - f(x).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_n} f''^2 &= \int_{x_0}^{x_n} (s - \Delta)''^2 \\ &= \int_{x_0}^{x_n} s''^2 + \underbrace{\int_{x_0}^{x_n} \Delta''^2}_{\geq 0} - 2 \underbrace{\int_{x_0}^{x_n} s'' \Delta''}_{I_s = 0} \\ &\geq \int_{x_0}^{x_n} s''^2, \end{aligned}$$

wobei nur noch $I_s = 0$ zu zeigen ist.

$$\begin{aligned} I_s = \int_{x_0}^{x_n} s'' \Delta'' &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} s'' \Delta'' \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ \left[s'' \Delta' \right]_{x_k}^{x_{k+1}} - \int_{x_k}^{x_{k+1}} s''' \Delta' \right\} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left\{ s''_{k+1} \Delta'_{k+1} - s''_k \Delta'_k - \int_{x_k}^{x_{k+1}} s''' \Delta' \right\}, \quad s''' = \text{const} \\ &= s''_n \Delta'_n - s''_0 \Delta'_0 - \sum_{k=0}^{n-1} 6d_k \int_{x_k}^{x_{k+1}} \Delta', \quad s''_0 = 0, \quad s''_n = 0 \\ &= - \sum_{k=0}^{n-1} 6d_k \left[\Delta \right]_{x_k}^{x_{k+1}}, \quad \Delta(x_k) = s(x_k) - f(x_k) = 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

(6.5) Beispiel Natürlicher kubischer Spline

$$n = 2, \quad h_k = h = 0.5,$$

x_k	0	0.5	1
f_k	1	-0.5	2

Bestimmung von c_k

$$c_0 = c_2 = 0,$$

$$2(h_0 + h_1)c_1 = e_1 = \frac{3}{h}(f_2 - 2f_1 + f_0),$$

$$a_k = f_k \Rightarrow c_1 = 12.$$

Bestimmung von b_k

$$b_0 = 2(a_1 - a_0) - \frac{1}{3}(2c_0 + c_1)\frac{1}{2} = -5,$$

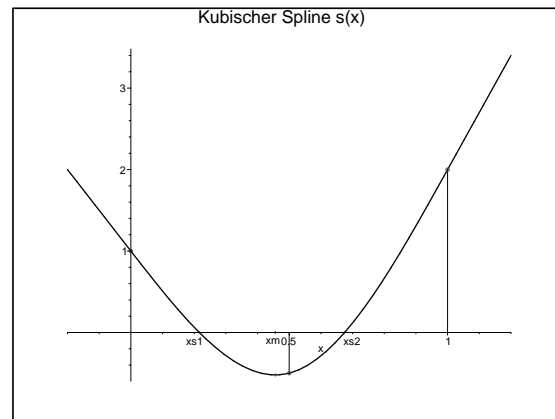
$$b_1 = b_0 + (c_1 + c_0)\frac{1}{2} = 1,$$

$$b_2 = b_1 + (c_2 + c_1)\frac{1}{2} = 7.$$

Bestimmung von d_k

$$d_0 = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{2}}(c_1 - c_0) = 8,$$

$$d_1 = \frac{1}{3 \cdot \frac{1}{2}}(c_2 - c_1) = -8,$$

**Abb. 6.3** Kubische SplinefunktionEigenschaften des Splines mit den Nullstellen $x_{1,2}^*$

$$x_1^* \approx 0.216, \quad x_2^* \approx 0.675, \quad x_{\min} \approx 0.456, \quad s(x_{\min}) \approx -0.521.$$

Damit ist

$$s(x) = \begin{cases} 1 - 5x, & x \in (-\infty, 0], \\ s^{(0)}(x) = 1 - 5x + 8x^3, & x \in [0, 0.5], \\ s^{(1)}(x) = -\frac{1}{2} + (x - \frac{1}{2}) + 12(x - \frac{1}{2})^2 - 8(x - \frac{1}{2})^3, & x \in [0.5, 1], \\ s^{(2)}(x) = 2 + 7(x - 1), & x \in [1, \infty). \end{cases}$$

Berechnung der Koeffizienten verschiedener kubischer Splines mittels Aufstellen des zugehörigen LGS

Wir nehmen für den Spline $s(x)$, $x \in [a, b] = [x_0, x_n]$, auf dem Teilintervall $[x_k, x_{k+1}]$ den modifizierten Ansatz

$$s^{(k)}(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Wir werden nun für die Koeffizienten c_k das zu lösende LGS aufstellen und dabei einige der genannten Typen von Zusatzbedingungen berücksichtigen.

Wir haben pro Teilintervall 4 Unbekannte und insgesamt $4n$ unbekannte Koeffizienten. Die Größen a_k folgen unmittelbar aus den Interpolationsbedingungen $s^{(k)}(x_k) = f_k$ als

$$a_k = f_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Die Beziehungen zwischen den übrigen Koeffizienten erhalten wir aus den Stetigkeitsbedingungen für $s(x)$, $s'(x)$ und $s''(x)$ an den Knotenpunkten x_{k+1} .

$$\begin{aligned} (I) \quad & s^{(k)}(x_{k+1}) = s^{(k+1)}(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad \text{wobei } s^{(n)}(x_n) \equiv f_n, \\ (II) \quad & s^{(k)'}(x_{k+1}) = s^{(k+1)'}(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \\ (III) \quad & s^{(k)''}(x_{k+1}) = s^{(k+1)''}(x_{k+1}), \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Die Gleichung (I) bei $k = n-1$ bedeutet insbesondere $s^{(n-1)}(x_n) = f_n$. Ausgeschrieben folgt somit

$$\begin{aligned} (I) \quad & d_k h_k^3 + c_k h_k^2 + b_k h_k + f_k = f_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \\ (II) \quad & 3d_k h_k^2 + 2c_k h_k + b_k = b_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2, \\ (III) \quad & 6d_k h_k + 2c_k = 2c_{k+1}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (III) und (I) lassen sich die Größen d_k und b_k durch c_k und c_{k+1} ausdrücken gemäß

$$\begin{aligned} (i) \quad & d_k = \frac{c_{k+1} - c_k}{3h_k}, \\ (ii) \quad & b_k = -\frac{h_k}{3}(c_{k+1} + 2c_k) + \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k}, \quad k = 0, 1, \dots, n-2. \end{aligned}$$

Einsetzen in (II) führt schließlich auf die $n-2$ Gleichungen

$$(iii) \quad r_k c_k + 2c_{k+1} + (1 - r_k)c_{k+2} = q_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-3,$$

für die n Unbekannten c_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$, wobei zur Abkürzung

$$\begin{aligned} r_k &= \frac{h_k}{h_{k+1} + h_k}, \\ q_k &= \frac{3}{h_k + h_{k+1}} \left(\frac{f_{k+2} - f_{k+1}}{h_{k+1}} - \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k} \right) \end{aligned}$$

verwendet wurde.

Man beachte, dass auch b_{n-1} mit Hilfe der Gleichung (II) ($k = n - 2$) und der Beziehungen (i), (ii) durch die Koeffizienten c_k beschrieben werden kann als

$$\begin{aligned} b_{n-1} &= 3d_{n-2}h_{n-2}^2 + 2c_{n-2}h_{n-2} + b_{n-2} \\ &= \frac{h_{n-2}}{3}(2c_{n-1} + c_{n-2}) + \frac{f_{n-1} - f_{n-2}}{h_{n-2}}. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen in (I) ($k = n - 1$) folgt außerdem

$$\begin{aligned} d_{n-1}h_{n-1}^3 &= -c_{n-1}h_{n-1}^2 - b_{n-1}h_{n-1} - f_{n-1} + f_n, \\ (iv) \quad d_{n-1}h_{n-1}^2 &= -c_{n-1}h_{n-1} - b_{n-1} + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}, \\ d_{n-1} &= \frac{1}{h_{n-1}^2} \left[-c_{n-1} \left(h_{n-1} + \frac{2}{3}h_{n-2} \right) - \frac{1}{3}c_{n-2}h_{n-2} + \frac{h_{n-1} + h_{n-2}}{3}q_{n-2} \right]. \end{aligned}$$

Damit können alle Koeffizienten berechnet werden, sobald die c_k bestimmt sind.

Für ein vollständiges LGS fehlen nun die zwei weiteren Bedingungen, welche häufig in Form zusätzlicher Randbedingungen ergänzt werden.

A – Natürliche Randbedingungen

Hier wird gefordert, dass die zweiten Ableitungen der Splinefunktion an den Randpunkten verschwinden.

$$(i) \quad s''(a) = 0, \quad (ii) \quad s''(b) = 0.$$

Diese Randbedingungen führen auf das folgende diagonaldominante Tridiagonalsystem.

(6.6) Satz Unter den natürlichen Randbedingungen ist der Vektor $(c_1, c_2, \dots, c_{n-1})^T$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 1-r_0 & 0 & & & \\ r_1 & 2 & 1-r_1 & 0 & & \\ 0 & r_2 & 2 & 1-r_2 & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & r_{n-4} & 2 & 1-r_{n-4} & 0 \\ & & & 0 & r_{n-3} & 2 & 1-r_{n-3} \\ & & & & 0 & r_{n-2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{n-3} \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_{n-4} \\ q_{n-3} \\ q_{n-2} \end{pmatrix}$$

Beweis

Bis auf die erste und letzte sind die Gleichungen des LGS identisch mit den Gleichungen (iii) ($k = 1, 2, \dots, n - 3$).

Die natürlichen Randbedingungen sind nach dem Ansatz für die Teilpolynome $s^{(k)}$ äquivalent zu $s^{(0)''}(a) = s^{(0)'}(x_0) = 0$ und $s^{(n-1)''}(b) = s^{(n-1)''}(x_n) = 0$, d. h.

$$(1) \quad c_0 = 0, \quad (2) \quad 3d_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1} = 0.$$

Aus (1) und der Gleichung (iii) ($k = 0$) folgt die erste Gleichung des LGS. Die letzte Gleichung folgt, wenn d_{n-1} mit Hilfe der Beziehung (2) aus Gleichung (iv) (3. Formel) eliminiert wird, d. h.

$$-\frac{1}{3h_{n-1}}c_{n-1} = d_{n-1} = \frac{1}{h_{n-1}^2} \left[-c_{n-1} \left(h_{n-1} + \frac{2}{3}h_{n-2} \right) - \frac{1}{3}c_{n-2}h_{n-2} + \frac{h_{n-1}+h_{n-2}}{3}q_{n-2} \right],$$

$$-h_{n-1}c_{n-1} = -(3h_{n-1} + 2h_{n-2})c_{n-1} - h_{n-2}c_{n-2} + (h_{n-1} + h_{n-2})q_{n-2},$$

$$h_{n-2}c_{n-2} + 2(h_{n-1} + h_{n-2})c_{n-1} = (h_{n-1} + h_{n-2})q_{n-2},$$

$$\frac{h_{n-2}}{h_{n-1} + h_{n-2}}c_{n-2} + 2c_{n-1} = q_{n-2},$$

$$r_{n-2}c_{n-2} + 2c_{n-1} = q_{n-2},$$

die letzte Beziehung unter Verwendung der Formel für r_k . □

B – Vollständige Randbedingungen

In diesem Fall werden Werte m_0 und m_n für die Steigungen der Splinefunktion an den Randpunkten vorgegeben. Man nennt sie auch eingespannter Spline.

$$(i) \quad s'(a) = m_0, \quad (ii) \quad s'(b) = m_n.$$

Zur Aufstellung des LGS führen wir zusätzlich zu den Unbekannten c_0, c_1, \dots, c_{n-1} eine weitere unbekannte Hilfsvariable

$$c_n = 3d_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1}$$

ein. Wir erhalten wieder ein diagonaldominantes Tridiagonalsystem.

(6.7) Satz Unter vollständigen Randbedingungen ist der Vektor $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1}, c_n)^T$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & & & & \\ r_0 & 2 & 1-r_0 & 0 & & & \\ 0 & r_1 & 2 & 1-r_1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & r_{n-3} & 2 & 1-r_{n-3} & 0 \\ & & & 0 & r_{n-2} & 2 & 1-r_{n-2} \\ & & & & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{h_0}(g_0 - m_0) \\ q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-3} \\ q_{n-2} \\ \frac{-3}{h_{n-1}}(g_{n-1} - m_n) \end{pmatrix},$$

wobei $g_k = \frac{f_{k+1} - f_k}{h_k}$.

Beweis

Die Gleichungen $2, 3, \dots, n-1$ des LGS entsprechen wieder den Gleichungen (iii) ($k = 0, 1, \dots, n-3$).

Die vollständigen Randbedingungen sind nach dem Ansatz für die Teilpolynome $s^{(k)}$ äquivalent zu $s^{(0)'}(a) = s^{(0)'}(x_0) = m_0$ und $s^{(n-1)'}(b) = s^{(n-1)'}(x_n) = m_n$, d. h.

$$(1) \quad b_0 = m_0, \quad (2) \quad 3d_{n-1}h_{n-1}^2 + 2c_{n-1}h_{n-1} + b_{n-1} = m_n.$$

Die Beziehung (1) führt zusammen mit Gleichung (ii) ($k = 0$) auf die erste Gleichung des LGS.

Die n -te Gleichung folgt durch Einsetzen der Definition von c_n , also umgeschrieben als $d_{n-1} = \frac{1}{3h_{n-1}}(c_n - c_{n-1})$, in (iv).

$$\frac{1}{3h_{n-1}}(c_n - c_{n-1}) = d_{n-1} = \frac{1}{h_{n-1}^2} \left[-c_{n-1} \left(h_{n-1} + \frac{2}{3}h_{n-2} \right) - \frac{1}{3}c_{n-2}h_{n-2} + \frac{h_{n-1} + h_{n-2}}{3}q_{n-2} \right],$$

$$h_{n-1}(c_n - c_{n-1}) = -(3h_{n-1} + 2h_{n-2})c_{n-1} - h_{n-2}c_{n-2} + (h_{n-1} + h_{n-2})q_{n-2},$$

$$\frac{h_{n-2}}{h_{n-1} + h_{n-2}}c_{n-2} + 2c_{n-1} + \frac{h_{n-1}}{h_{n-1} + h_{n-2}}c_n = q_{n-2},$$

$$r_{n-2}c_{n-2} + 2c_{n-1} + (1 - r_{n-2})c_n = q_{n-2},$$

die letzte Beziehung unter Verwendung der Formel für r_k .

Nun nehmen wir die mittlere Formel von (iv), ersetzen den Wert b_{n-1} durch den aus der Randbedingung (2) und berücksichtigen zum Schluss $d_{n-1} = \frac{1}{3h_{n-1}}(c_n - c_{n-1})$ aus der Definition von c_n .

$$d_{n-1}h_{n-1}^2 = -c_{n-1}h_{n-1} - b_{n-1} + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}},$$

$$b_{n-1} = m_n - 3d_{n-1}h_{n-1}^2 - 2c_{n-1}h_{n-1},$$

$$d_{n-1}h_{n-1}^2 = -c_{n-1}h_{n-1} - (m_n - 3d_{n-1}h_{n-1}^2 - 2c_{n-1}h_{n-1}) + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}},$$

$$-2h_{n-1}^2d_{n-1} - h_{n-1}c_{n-1} = \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - m_n,$$

$$\frac{2h_{n-1}^2}{3h_{n-1}}(c_n - c_{n-1}) + h_{n-1}c_{n-1} = - \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - m_n \right),$$

$$c_{n-1} + 2c_n = - \frac{3}{h_{n-1}} \left(\frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} - m_n \right).$$

□

C – Periodische Randbedingungen

Ist $f_0 = f_n$, so dienen periodische Randbedingungen zur Konstruktion einer Splinefunktion, welche über das Intervall $[a, b]$ hinaus periodisch fortgesetzt werden kann.

$$(i) \quad s'(a) = s'(b), \quad (ii) \quad s''(a) = s''(b).$$

Das hierdurch entstehende LGS ist nun nicht mehr tridiagonal.

(6.8) Satz Unter periodischen Randbedingungen ist der Vektor $(c_0, c_1, \dots, c_{n-1})^T$ Lösung des LGS

$$\begin{pmatrix} 2 & 1-r_{-1} & 0 & & & & r_{-1} \\ r_0 & 2 & 1-r_0 & 0 & & & \\ 0 & r_1 & 2 & 1-r_1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & r_{n-4} & 2 & 1-r_{n-4} & 0 \\ & & & 0 & r_{n-3} & 2 & 1-r_{n-3} \\ 1-r_{n-2} & & & & 0 & r_{n-2} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_{n-3} \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_{-1} \\ q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_{n-4} \\ q_{n-3} \\ q_{n-2} \end{pmatrix},$$

wobei

$$r_{-1} = \frac{h_{n-1}}{h_0 + h_{n-1}} \quad \text{und} \quad q_{-1} = \frac{3}{h_0 + h_{n-1}} \left(\frac{f_1 - f_0}{h_0} - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}} \right).$$

Beweis

Die Gleichungen $2, 3, \dots, n-1$ entsprechen den Gleichungen (iii) ($k = 0, 1, \dots, n-3$). Die periodischen Randbedingungen sind nach dem Ansatz für die Teilpolynome $s^{(k)}$ äquivalent zu $s^{(0)'}(a) = s^{(n-1)'}(b)$ und $s^{(0)''}(a) = s^{(n-1)''}(b) = s^{(n)''}(b)$, d. h. äquivalent zu den Bedingungen an die Koeffizienten

$$(1) \quad b_0 = 3d_{n-1}h_{n-1}^2 + 2c_{n-1}h_{n-1} + b_{n-1}, \quad (2) \quad c_0 = 3d_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1} = c_n.$$

Die Herleitung der ersten Gleichung des LGS erfolgt durch Einsetzen der Beziehungen (iv) (mittlere Formel) und (2) sowie der Identitäten (ii) für b_0 und b_{n-1} in die Randbedingung (1).

$$b_0 = 3d_{n-1}h_{n-1}^2 + 2c_{n-1}h_{n-1} + b_{n-1},$$

wobei

$$d_{n-1}h_{n-1}^2 = -c_{n-1}h_{n-1} - b_{n-1} + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}},$$

$$b_0 = -\frac{h_0}{3}(c_1 + 2c_0) + \frac{f_1 - f_0}{h_0}, \quad b_{n-1} = -\frac{h_{n-1}}{3}(c_n + 2c_{n-1}) + \frac{f_n - f_{n-1}}{h_{n-1}}, \quad c_n = c_0.$$

Somit gilt nach Einsetzen

$$-\frac{h_0}{3}(c_1+2c_0) + \frac{f_1-f_0}{h_0} = -c_{n-1}h_{n-1}-2b_{n-1} + 3\frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}} = \frac{2h_{n-1}}{3}c_0 + \frac{h_{n-1}}{3}c_{n-1} + \frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}},$$

$$\frac{2}{3}(h_0+h_{n-1})c_0 + \frac{1}{3}h_0c_1 + \frac{1}{3}h_{n-1}c_{n-1} = \frac{f_1-f_0}{h_0} - \frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}},$$

$$2c_0 + \frac{h_0}{h_0+h_{n-1}}c_1 + \frac{h_{n-1}}{h_0+h_{n-1}}c_{n-1} = \frac{3}{h_0+h_{n-1}} \left(\frac{f_1-f_0}{h_0} - \frac{f_n-f_{n-1}}{h_{n-1}} \right),$$

$$2c_0 + (1-r_{-1})c_1 + r_{-1}c_{n-1} = q_{-1}.$$

Die letzte Gleichung des LGS folgt durch Einsetzen von (iv) ($3d_{n-1}h_{n-1}$ aus der dritten Gleichung) in die Randbedingung (2).

$$c_0 = 3d_{n-1}h_{n-1} + c_{n-1},$$

$$3d_{n-1}h_{n-1} = -c_{n-1} \left(3 + \frac{2h_{n-2}}{h_{n-1}} \right) - c_{n-2} \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}} + \frac{h_{n-1}+h_{n-2}}{h_{n-1}}q_{n-2},$$

$$c_0 = -2 \left(1 + \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}} \right) c_{n-1} - \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}}c_{n-2} + \frac{h_{n-1}+h_{n-2}}{h_{n-1}}q_{n-2},$$

$$\frac{h_{n-1}}{h_{n-1}+h_{n-2}}c_0 + \frac{h_{n-2}}{h_{n-1}+h_{n-2}}c_{n-2} + 2c_{n-1} = q_{n-2},$$

$$(1-r_{n-2})c_0 + r_{n-2}c_{n-2} + 2c_{n-1} = q_{n-2}.$$

□

6.4 B-Splines

Wir verwenden nun einen etwas anderen Zugang zu den Splinekurven.

Er beruht auf der Konstruktion von entsprechend glatten Basispolynomen und ihrer Linearkombination.

(6.9) Definition Gegeben seien das Intervall $I=[a, b] \in \mathbb{R}$ und die Unterteilung

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{l+1}\} \text{ mit } a = x_0 < x_1 < \dots < x_{l+1} = b.$$

Ein Spline vom **Grad** $k - 1$ (Spline der Ordnung k) über Δ ist eine $(k - 2)$ -mal stetig differenzierbare Funktion, welche in jedem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ mit einem Polynom vom Grad $\leq k - 1$ übereinstimmt.

Der Raum aller Splines über Δ vom Grad $k - 1$ wird mit $\mathcal{S}_{k,\Delta}$ bezeichnet.

(6.10) Bemerkung $\mathcal{S}_{k,\Delta}$ ist ein linearer Vektorraum der Dimension $l + k$. Insbesondere sind also $l + k$ unabhängige Bedingungen nötig, um einen Spline vom Grad $k - 1$ eindeutig zu bestimmen.

$\mathcal{S}_{2,\Delta}$ enthält den Polygonzug mit $l + 2$ Bedingungen.

$\mathcal{S}_{3,\Delta}$ enthält die quadratischen Splines mit $l + 3$ Bedingungen.

$\mathcal{S}_{4,\Delta}$ enthält die kubischen Splines mit $l + 4$ Bedingungen.

Die Begründung der Dimension $l + k$ des Vektorraums $\mathcal{S}_{k,\Delta}$ und damit der Anzahl der unabhängigen Bedingungen erfolgt später.

Eine effiziente Möglichkeit, eine Menge von Datenpaaren durch Splinekurven zu interpolieren, bietet die Verwendung von **Basis-Splines**, auch B-Splines genannt.

Dazu nehmen wir eine vorläufige Umbenennung der Stützstellen vor.

(6.11) Definition B-Splines

Sei $\xi_1 \leq \xi_2 \leq \dots \leq \xi_n \leq \xi_{n+1}$ eine Folge Δ_1 von Stützstellen.

B-Splines $N_{ik}(x)$ der Ordnung k ($k = 1, 2, \dots, n, n + 1$) sind für $i = 1, 2, \dots, n + 1 - k$ wie folgt rekursiv definiert.

$k = 1$:

$$N_{i,1}(x) = \chi_{[\xi_i, \xi_{i+1})}(x) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \xi_i \leq x < \xi_{i+1}, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

$k > 1$:

$$N_{ik}(x) = \frac{x - \xi_i}{\xi_{i+k-1} - \xi_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{\xi_{i+k} - x}{\xi_{i+k} - \xi_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x).$$

Die Vereinbarung für zusammenfallende Stützstellen $\xi_i = \xi_j$ ist, dass dann Quotienten der Form "0/0" als Null interpretiert werden.

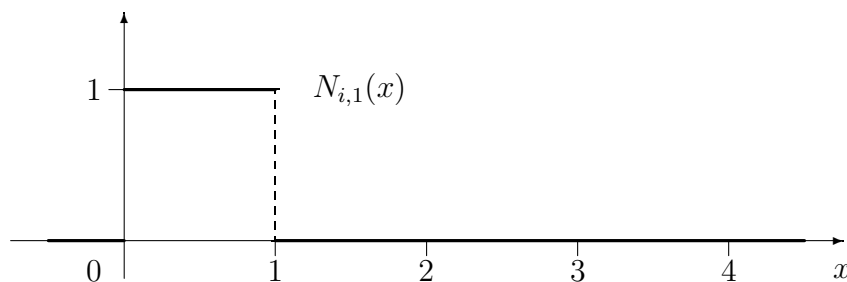
(6.12) Beispiel Betrachten wir B-Splines bei paarweise verschiedenen Stellen ξ_i .

Zusätzlich geben wir auf einem “inneren“ Standardintervall der Form $[\xi_i, \xi_{i+k}] = [0, k]$ den B-Spline mit diesem Träger sowie seine grafische Darstellung an.

$k = 1$: $N_{i,1}(x) = \chi_{[\xi_i, \xi_{i+1})}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, stückweise konstant,
 $\text{supp} N_{i,1} = [\xi_i, \xi_{i+1}]$ ist Träger.

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^{n-1} N_{i,1}(x) = 1.$$

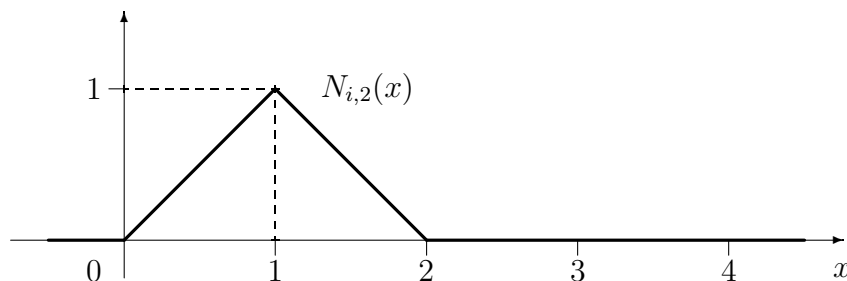
Abb. 6.4 B-Splines $N_{i,1}(x)$ auf der Unterteilung Δ_1



$k = 2$: $N_{i,2}(x) = \frac{x - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i} N_{i,1}(x) + \frac{\xi_{i+2} - x}{\xi_{i+2} - \xi_{i+1}} N_{i+1,1}(x)$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$,
 stetig und stückweise linear, $\text{supp} N_{i,2} = [\xi_i, \xi_{i+2}]$.

$$N_{i,2}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2 - x, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^{n-2} N_{i,2}(x) = 1.$$

Abb. 6.5 B-Splines $N_{i,2}(x)$ im Innern der Unterteilung Δ_1



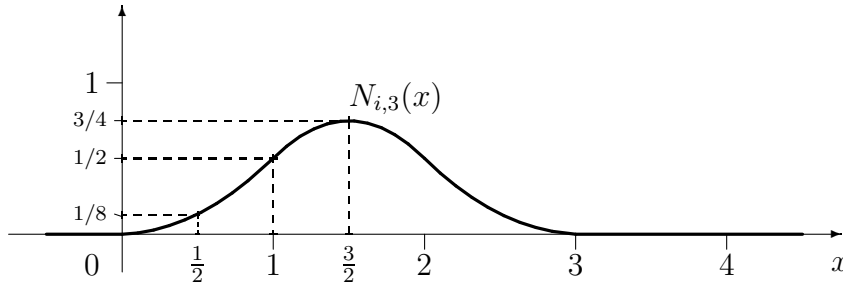
allgemein

$$N_{i,2}(x) = \begin{cases} \frac{x - \xi_i}{\xi_{i+1} - \xi_i}, & x \in [\xi_i, \xi_{i+1}], \\ \frac{\xi_{i+2} - x}{\xi_{i+2} - \xi_{i+1}}, & x \in [\xi_{i+1}, \xi_{i+2}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$k = 3: N_{i,3}(x) = \frac{x - \xi_i}{\xi_{i+2} - \xi_i} N_{i,2}(x) + \frac{\xi_{i+3} - x}{\xi_{i+3} - \xi_{i+1}} N_{i+1,2}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-2,$$

differenzierbar und stückweise quadratisch, $\text{supp } N_{i,3} = [\xi_i, \xi_{i+3}]$.

$$N_{i,3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \in [0, 1] \\ -x^2 + 3x - \frac{3}{2}, & x \in [1, 2] \\ \frac{1}{2}(x-3)^2, & x \in [2, 3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^{n-3} N_{i,3}(x) = 1.$$

Abb. 6.6 B-Splines $N_{i,3}(x)$ im Innern der Unterteilung Δ_1 

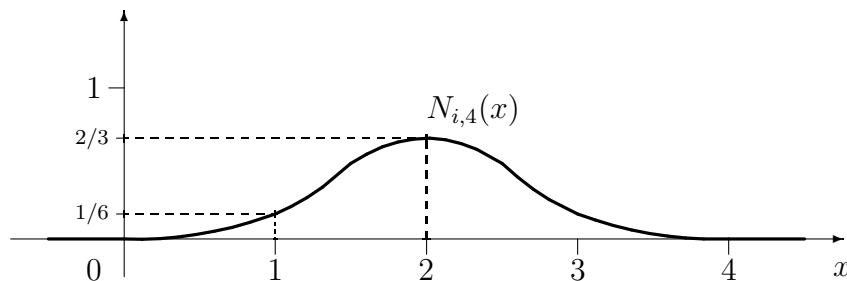
allgemein

$$N_{i,3}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\xi_{i+2} - \xi_i} \frac{(x - \xi_i)^2}{\xi_{i+1} - \xi_i}, & x \in [\xi_i, \xi_{i+1}], \\ \frac{1}{\xi_{i+2} - \xi_{i+1}} \left[\frac{(x - \xi_i)(\xi_{i+2} - x)}{\xi_{i+2} - \xi_i} + \frac{(x - \xi_{i+1})(\xi_{i+3} - x)}{\xi_{i+3} - \xi_{i+1}} \right], & x \in [\xi_{i+1}, \xi_{i+2}], \\ \frac{1}{\xi_{i+3} - \xi_{i+1}} \frac{(\xi_{i+3} - x)^2}{\xi_{i+3} - \xi_{i+2}}, & x \in [\xi_{i+2}, \xi_{i+3}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$k = 4: N_{i,4}(x) = \frac{x - \xi_i}{\xi_{i+3} - \xi_i} N_{i,3}(x) + \frac{\xi_{i+4} - x}{\xi_{i+4} - \xi_{i+1}} N_{i+1,3}(x), \quad i = 1, 2, \dots, n-3,$$

zweimal differenzierbar und stückweise kubisch, $\text{supp } N_{i,4} = [\xi_i, \xi_{i+4}]$.

$$N_{i,4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ \frac{4}{6} - (x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^3, & x \in [2, 3] \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{6}(x-3)^3 \\ \quad = \frac{1}{6}(4-x)^3, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \quad \sum_{i=1}^{n-4} N_{i,4}(x) = 1.$$

Abb. 6.7 B-Splines $N_{i,4}(x)$ im Innern der Unterteilung Δ_1 

allgemein

$$N_{i,4}(x) = \begin{cases} \frac{(x - \xi_i)^3}{(\xi_{i+1} - \xi_i)(\xi_{i+2} - \xi_i)(\xi_{i+3} - \xi_i)} = g_1, & x \in [\xi_i, \xi_{i+1}], \\ g_1 - (x - \xi_{i+1})^3 \left[\frac{1}{(\xi_{i+2} - \xi_{i+1})(\xi_{i+3} - \xi_{i+1})(\xi_{i+4} - \xi_{i+1})} \right. \\ \quad + \frac{1}{(\xi_{i+2} - \xi_{i+1})(\xi_{i+3} - \xi_{i+1})(\xi_{i+3} - \xi_i)} \\ \quad + \frac{1}{(\xi_{i+2} - \xi_{i+1})(\xi_{i+2} - \xi_i)(\xi_{i+3} - \xi_i)} \\ \quad \left. + \frac{1}{(\xi_{i+1} - \xi_i)(\xi_{i+2} - \xi_i)(\xi_{i+3} - \xi_i)} \right] = g_2, & x \in [\xi_{i+1}, \xi_{i+2}], \\ g_2 + (x - \xi_{i+2})^3 \left[\frac{1}{(\xi_{i+3} - \xi_{i+2})(\xi_{i+4} - \xi_{i+2})(\xi_{i+4} - \xi_{i+1})} \right. \\ \quad + \frac{1}{(\xi_{i+3} - \xi_{i+2})(\xi_{i+3} - \xi_{i+1})(\xi_{i+4} - \xi_{i+1})} \\ \quad + \frac{1}{(\xi_{i+2} - \xi_{i+1})(\xi_{i+3} - \xi_{i+1})(\xi_{i+4} - \xi_i)} \\ \quad + \frac{1}{(\xi_{i+3} - \xi_{i+2})(\xi_{i+3} - \xi_{i+1})(\xi_{i+3} - \xi_i)} \\ \quad + \frac{1}{(\xi_{i+2} - \xi_{i+1})(\xi_{i+3} - \xi_{i+1})(\xi_{i+3} - \xi_i)} \\ \quad \left. + \frac{1}{(\xi_{i+2} - \xi_{i+1})(\xi_{i+2} - \xi_i)(\xi_{i+3} - \xi_i)} \right], & x \in [\xi_{i+2}, \xi_{i+3}], \\ \frac{(\xi_{i+4} - x)^3}{(\xi_{i+4} - \xi_{i+1})(\xi_{i+4} - \xi_{i+2})(\xi_{i+4} - \xi_{i+3})}, & x \in [\xi_{i+3}, \xi_{i+4}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(6.13) Übung Schreiben Sie die Splinekurven des Beispiels (6.1) als Linearkombinationen der zugehörigen B-Splines N_{ik} .

Im Folgenden betrachten wir die **erweiterte Stützstellenfolge** Δ_2 , in welcher der Anfangsknoten und der Endknoten k -mal vorkommen.

$$a = \xi_1 = \dots = \xi_k < \xi_{k+1} < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = \dots = \xi_{n+k} = b.$$

Man beachte hier die neue Nummerierung der Stützstellen.

(6.14) Satz Marsden-Identität

Für $x \in [a, b]$, $s \in \mathbb{R}$ und Δ_2 gilt

$$(x - s)^{k-1} = \sum_{i=1}^n \phi_{ik}(s) N_{ik}(x) \quad \text{mit} \quad \phi_{ik}(s) = \prod_{j=1}^{k-1} (\xi_{i+j} - s).$$

Beweis Für $k = 1$ ist die Behauptung richtig wegen $\phi_{i,1}(s) = 1$, $\sum_{i=1}^n N_{i,1}(x) = 1$.

Es sei $k > 1$. Die Behauptung sei bewiesen für alle $l \leq k - 1$.

Durch Einsetzen der Rekursionsformel der B-Splines folgt

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^n \phi_{ik}(s) N_{ik}(x) = \\ &= \sum_{i=2}^n \left(\frac{x - \xi_i}{\xi_{i+k-1} - \xi_i} \phi_{ik}(s) + \frac{\xi_{i+k-1} - x}{\xi_{i+k-1} - \xi_i} \phi_{i-1,k}(s) \right) N_{i,k-1}(x) \\ &= \sum_{i=2}^n \prod_{j=1}^{k-2} (\xi_{i+j} - s) \underbrace{\left(\frac{x - \xi_i}{\xi_{i+k-1} - \xi_i} (\xi_{i+k-1} - s) + \frac{\xi_{i+k-1} - x}{\xi_{i+k-1} - \xi_i} (\xi_i - s) \right)}_{x-s} N_{i,k-1}(x) \\ &= (x - s) \sum_{i=2}^n \phi_{i,k-1}(s) N_{i,k-1}(x) \\ &= (x - s)(x - s)^{k-2} \\ &= (x - s)^{k-1}. \end{aligned}$$

□

(6.15) Folgerung (a) Jedes Polynom vom Grad $\leq k - 1$ lässt sich als Linearkombination der B-Splines $N_{1,k}, N_{2,k}, \dots, N_{n,k}$ schreiben.

Beweis Die l -te Ableitung von $f(s) = (x - s)^{k-1}$ an der Stelle 0 ist

$$f^{(l)}(0) = (k - 1) \cdot \dots \cdot (k - l) \cdot (-1)^l x^{k-l-1} = \sum_{i=1}^n \phi_{ik}^{(l)}(0) N_{ik}(x).$$

Mit $m = k - l - 1 \leq k - 1$ folgt bei Umstellung nach x^m daraus

$$x^m = \frac{(-1)^{k-m-1}}{(k - 1) \cdot \dots \cdot (m + 1)} \sum_{i=1}^n \phi_{ik}^{(k-m-1)}(0) N_{ik}(x).$$

Somit ist eine beliebige Potenz x^m , $m = 0, 1, \dots, k - 1$, eine Linearkombination der B-Splines $N_{ik}(x)$ und damit auch jedes Polynom vom Grad $\leq k - 1$. □

(b) Wie im Beispiel (6.12) schon angedeutet, bilden die B-Splines eine Zerlegung der Eins.

$$\sum_{i=1}^n N_{ik}(x) = 1 \quad \text{für } x \in [a, b].$$

Beweis Mit $m = 0$, d. h. $l = k - 1$ folgt aus dem Beweis von Teil (a) der Folgerung

$$1 = x^0 = \frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!} \sum_{i=1}^n \phi_{ik}^{(k-1)}(0) N_{ik}(x).$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \phi_{ik}^{(k-1)}(s) &= \left[\prod_{j=1}^{k-1} (\xi_{i+j} - s) \right]^{(k-1)} \\ &= [(-1)^{k-1} s^{k-1} + \dots]^{(k-1)} \\ &= (-1)^{k-1} (k-1)! \end{aligned}$$

und somit auch

$$\phi_{ik}^{(k-1)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!.$$

Dies eingesetzt in die Summenformel, ergibt damit die Bedingung für die Zerlegung der Eins. \square

(c) Die B-Splines sind lokal linear unabhängig.

Ist $(c, d) \subset [a, b]$ ein Intervall, $c < d$, und gilt für alle $x \in (c, d)$

$$\sum_{i=1}^n c_i N_{ik}(x) = 0,$$

so ist $c_i = 0$, falls $(c, d) \cap (\xi_i, \xi_{i+k}) \neq \emptyset$.

Nur die $N_{ik}(x)$, die in (c, d) einen Beitrag liefern, haben $c_i = 0$.

Beweis Wähle $(c_0, d_0) \subseteq (c, d)$ so, dass keine Stützstelle ξ_j in (c_0, d_0) enthalten ist. Der Raum $\mathcal{P}_{k-1}(c_0, d_0)$ der Polynome vom Grad $\leq k-1$ auf (c_0, d_0) hat die Dimension k und wird gemäß (a) von den B-Splines $N_{ik}(x)$ aufgespannt. Auf (c_0, d_0) sind aber nur k B-Splines von Null verschieden. Diese müssen daher linear unabhängig sein, also $c_i = 0$ für die entsprechenden Koeffizienten. \square

(d) Jeder Spline $s(x) \in \mathcal{S}_{k, \Delta_2}$ besitzt eine eindeutige Darstellung als Linearkombination

$$s(x) = \sum_{i=1}^n d_i N_{ik}(x).$$

Hier ist der Index n aus der Stützstellenfolge Δ_2 die Dimension des Vektorraums und gleichzeitig die Anzahl der unabhängigen Bedingungen.

Die Größe n soll nun in Bezug auf die anfängliche Unterteilung

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{l+1}\} \text{ mit } a = x_0 < x_1 < \dots < x_{l+1} = b$$

sowie deren Modifikationen Δ_1 und Erweiterungen Δ_2, Δ_{erw} bestimmt werden. Dabei werden wir in der Verteilung Δ_{erw} die k -malige Wiederholung der 1. Stützstelle links sowie der letzten Stützstelle rechts mit fortlaufenden Indizes versehen.

Folgendes Schema soll die Zuordnung der Stützstellen demonstrieren.

$$\begin{array}{rcl} \Delta_1 : & a = \bar{\xi}_1 < \bar{\xi}_2 < \dots < \bar{\xi}_{\bar{n}} < \bar{\xi}_{\bar{n}+1} = b \\ & \downarrow \quad \downarrow \dots \downarrow \quad \downarrow \\ \Delta_2 : & \xi_1 = \dots = \xi_{k-1} = \xi_k < \xi_{k+1} < \dots < \xi_n < \xi_{n+1} = \xi_{n+2} = \dots = \xi_{n+k} \\ & \downarrow \quad \downarrow \dots \downarrow \quad \downarrow \\ \Delta_{erw} : & \underbrace{x_{-(k-1)} = \dots = x_{-1} = x_0}_{k\text{-mal}} < x_1 < \dots < x_l < \underbrace{x_{l+1} = x_{l+2} = \dots = x_{l+k}}_{k\text{-mal}} \end{array}$$

Dimension

= Anzahl der Komponenten $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$: $n = \bar{n} + k - 1$,

= Anzahl der Komponenten $x_{-(k-1)}, x_{-(k-2)}, \dots, x_l$: $l + k$.

Somit erhalten wir die eingangs genannte Dimensionsgröße $\dim = l + k$.

Bei Beispielrechnungen hat man somit zwei Möglichkeiten der Bezeichnung der erweiterten Stützstellenfolge. Entweder nimmt man eine Umindizierung wie bei Δ_2 vor, oder man lässt ausgehend von Δ bzw. Δ_1 die Nummerierung nach “links“ und “rechts“ fortlaufen. Der 1. Index im B-Spline k -ter Ordnung $N_{ik}(x)$ bewegt sich dann entsprechend in der erweiterten Stützstellenfolge.

Tab. 6.1 Varianten der Unterteilung und Stützstellenindizierung bei B-Splines

Var.	Unterteilung	Indizierung i in $N_{ik}(x)$	Dimension
(V1)	Δ_2	$1, 2, \dots, n$	n
(V2)	$\Delta = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$	$-(k-1)+1, -(k-1)+2, \dots, n-1$	$n+k-2$
(V3)	$\Delta = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+1}\}$	$-(k-1)+1, -(k-1)+2, \dots, n$	$n+k-1$
(V4)	$\Delta = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n\}$	$-(k-1), -(k-1)+1, \dots, n-1$	$n+k-1$
(V5)	$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{l+1}\}$	$-(k-1), -(k-1)+1, \dots, l$	$l+k$

Bevorzugte Anwendung finden die beidseitige Indexerweiterung in den Varianten (V2) und (V5).

(6.16) Beispiel Gegeben sei die Referenz mit 4 Knoten ($n = 4, l = 2$)

$$\begin{array}{c|cccc} \xi_j = x_{j-1}, j = 1, 2, 3, 4 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y_j & 2 & 3 & 3 & 5 \end{array}$$

1. Linearer Spline, Polygonzug der Ordnung $k = 2$ Erweiterte Stützstellenfolge $\{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_4, \xi_5\}$, $\xi_0 = \xi_1$, $\xi_4 = \xi_5$, $\dim = 4$.

$$s(x) = \sum_{i=0}^3 d_i N_{i,2}(x),$$

$$N_{0,2}(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{1,2}(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1] \\ 2-x, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{2,2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{sonst} \\ x-1, & x \in [1, 2] \\ 3-x, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

$$N_{3,2}(x) = \begin{cases} 0, & \text{sonst} \\ x-2, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Interpolationsforderung

$$y_j = s(\xi_j) = \sum_{i=0}^3 d_i N_{i,2}(\xi_j), \quad j = 1, 2, 3, 4, \Rightarrow d_i = y_{i+1}.$$

Linearer Spline $s(x) = 2N_{0,2}(x) + 3N_{1,2}(x) + 3N_{2,2}(x) + 5N_{3,2}(x)$.2. Quadratischer Spline der Ordnung $k = 3$ Erweiterte Stützstellenfolge $\{\xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_4, \xi_5, \xi_6\}$, $\xi_{-1} = \xi_0 = \xi_1$, $\xi_4 = \xi_5 = \xi_6$, $\dim = 5$.

$$s(x) = \sum_{i=-1}^3 d_i N_{i,3}(x),$$

$$N_{-1,3}(x) = \begin{cases} (1-x)^2, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{0,3}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}(4-3x), & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{2}(2-x)^2, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{1,3}(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & x \in [0, 1] \\ \frac{x^2}{2} - \frac{3}{2}(x-1)^2, & x \in [1, 2] \\ \frac{1}{2}(3-x)^2, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

$$N_{2,3}(x) = \begin{cases} 0, & \text{sonst} \\ \frac{1}{2}(x-1)^2, & x \in [1, 2] \\ \frac{1}{2}(3-x)(3x-5), & x \in [2, 3] \end{cases}$$

$$N_{3,3}(x) = \begin{cases} 0, & \text{sonst} \\ (x-2)^2, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Interpolationsforderung

$$y_j = s(\xi_j) = \sum_{i=-1}^3 d_i N_{i,3}(\xi_j), \quad j = 1, 2, 3, 4.$$

Daraus folgt unter Berücksichtigung der Funktionswerte der B-Splines $N_{i,3}(x)$ an den Stützstellen das unterbestimmte LGS

$$\begin{aligned} y_1 &= d_{-1}, \\ y_2 &= \frac{1}{2}(d_0 + d_1), \\ y_3 &= \frac{1}{2}(d_1 + d_2), \\ y_4 &= d_3, \end{aligned}$$

bzw. in Matrixform

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & 1 & \\ & & 1 & 1 \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{-1} \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Seine Lösung ist

$$d_{-1} = 2, \quad d_3 = 5, \quad d_0 = d, \quad d_1 = 6 - d, \quad d_2 = d.$$

Der eine freie Parameter d muss wie bekannt durch eine zusätzliche Bedingung gebunden werden. Dazu verwenden wir die Endbedingung “links“ mit der verschwindenden Ableitung $s'(\xi_1) = s'(0) = 0$.

Die benötigten Ableitungen der B-Splines auf dem ersten Teilintervall $[0,1]$ sind

$$N'_{-1,3}(x) = -2(1-x), \quad N'_{0,3}(x) = 2-3x, \quad N'_{1,3}(x) = x, \quad N'_{2,3}(x) = N'_{3,3}(x) = 0.$$

Somit erhält man

$$0 = s'(0) = 2N'_{-1,3}(0) + dN'_{0,3}(0) + (6-d)N'_{1,3}(0) + 0 = -4 + 2d \Rightarrow d = 2,$$

und als endgültige Lösung den quadratischen Spline

$$\begin{aligned} s(x) &= 2N_{-1,3}(x) + 2N_{0,3}(x) + 4N_{1,3}(x) + 2N_{2,3}(x) + 5N_{3,3}(x) \\ &= \begin{cases} x^2 + 2, & x \in [0, 1] \\ -2x^2 + 6x - 1, & x \in [1, 2] \\ 4x^2 - 18x + 23, & x \in [2, 3]. \end{cases} \end{aligned}$$

3. Kubischer Spline der Ordnung $k = 4$ Erweiterte Stützstellenfolge $\{\xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_4, \xi_5, \xi_6, \xi_7\}$, $\xi_{-2} = \xi_{-1} = \xi_0 = \xi_1$, $\xi_4 = \xi_5 = \xi_6 = \xi_7$, $\dim = 6$.

Der Ansatz ist

$$s(x) = \sum_{i=-2}^3 d_i N_{i,4}(x).$$

Mit der Interpolationsforderung

$$y_j = s(\xi_j), \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

und den zwei Zusatzbedingungen $s''(\xi_1) = 0$, $s''(\xi_4) = 0$ erhält man das LGS für die Größen d_i .

$$\begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{7}{12} & \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} & \frac{7}{12} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_{-2} \\ d_{-1} \\ d_0 \\ d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Seine Lösung ist

$$d_{-2} = 2, \quad d_{-1} = \frac{37}{15}, \quad d_0 = \frac{17}{5}, \quad d_1 = \frac{12}{5}, \quad d_2 = \frac{62}{15}, \quad d_3 = 5.$$

Der natürliche kubische Spline ist

$$s(x) = \begin{cases} 2 + \frac{7}{5}x - \frac{2}{5}x^3, & x \in [0, 1] \\ \frac{3}{5} + \frac{28}{5}x - \frac{21}{5}x^2 + x^3, & x \in [1, 2] \\ \frac{67}{5} - \frac{68}{5}x + \frac{27}{5}x^2 - \frac{3}{5}x^3, & x \in [2, 3]. \end{cases}$$

Natürlich kann man die Unbekannten d_{-2} und d_3 auch gleich eliminieren, so dass das LGS zwei Gleichungen weniger hat.

Wir wollen noch eine weitere Form der Unterteilung betrachten.
Gegeben sei die Referenz mit $n + 1$ Knoten

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{l+1} = x_n\} \text{ mit } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Wir konstruieren die kubischen B-Splines $N_{i,4}$, indem wir die modifizierte Erweiterung Δ'_{erw} benutzen. Dabei werden wir in der Verteilung Δ'_{erw} die 1. Stützstelle links sowie die letzte Stützstelle rechts vierfach zählen, sie mit fortlaufenden Indizes versehen und eine Indexverschiebung um 1 vornehmen, also

$$\Delta'_{erw} = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+7}\}.$$

Es ist damit

$$\xi_i = \begin{cases} x_0 & \text{für } i = 1, 2, 3, 4, \\ x_{i-4} & \text{für } i = 5, 6, \dots, n+3, \\ x_n & \text{für } i = n+4, \dots, n+7. \end{cases}$$

Als nächstes definieren wir die stückweise konstanten Funktionen $N_{i,1}$ durch

$$\begin{aligned} N_{1,1} &= N_{2,1} = N_{3,1} = 0 \quad \forall x, \\ N_{i,1} &= \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [\xi_i, \xi_{i+1}) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{für } i = 4, \dots, n+3, \\ N_{n+4,1} &= N_{n+5,1} = N_{n+6,1} = 0 \quad \forall x. \end{aligned}$$

Schließlich führen wir die für $k = 2, 3, 4$ die Rekursion durch mit der speziellen Vereinbarung bei zusammen fallenden Stellen ξ_i

$$N_{ik}(x) = \frac{x - \xi_i}{\xi_{i+k-1} - \xi_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{\xi_{i+k} - x}{\xi_{i+k} - \xi_{i+1}} N_{i+1,k-1}(x).$$

Eigenschaften der $N_{i,4}(x)$

- (a) Für $i = 1, 2, \dots, 6$ ist $N_{i,4} \in \mathcal{S}_{4,\Delta}$. Sie bilden eine Basis dieses Raums.
- (b) Am linken Rand ist $N_{1,4}(\xi_1) = N_{1,4}(x_0) = 1$. Außerdem ist $N_{i,4}(\xi_1) = 0$ für $i > 1$, $\frac{d}{dx} N_{i,4}(\xi_1) = 0$ für $i > 2$ sowie $\frac{d^2}{dx^2} N_{i,4}(\xi_1) = 0$ für $i > 3$.
Ersetzen wir i durch $n+7-i$, so erhalten wir entsprechende Aussagen für den rechten Rand.
- (c) Der Träger von $N_{i,4}(x)$ erstreckt sich höchstens auf vier Teilintervalle.
Ist $x \notin [\xi_i, \xi_{i+4}]$, so ist $N_{i,4}(x) = 0$.

Für den interpolierenden kubischen Spline wählen wir auf Δ'_{erw} den Ansatz

$$s(x) = \sum_{i=1}^{n+3} d_i N_{i,4}(x).$$

Als Zusatzbedingungen beschränken wir uns auf die natürlichen Randbedingungen $s''(x_0) = 0, s''(x_n) = 0$.

Aus der Interpolationsforderung $s(x_j) = y_j, j = 0, 1, \dots, n$, erhalten wir mit den Eigenschaften der B-Splines die Gleichungen für die Unbekannten d_i .

$$\begin{aligned} s(x_0) &= d_1 N_{1,4}(x_0) = d_1 = y_0, \\ s(x_i) &= d_{i+1} N_{i+1,4}(x_i) + d_{i+2} N_{i+2,4}(x_i) + d_{i+3} N_{i+3,4}(x_i) = y_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, \\ s(x_n) &= d_{n+3} N_{n+3,4}(x_n) = d_{n+3} = y_n. \end{aligned}$$

Die Randbedingungen führen auf

$$\begin{aligned} s''(x_0) &= d_1 N''_{1,4}(x_0) + d_2 N''_{2,4}(x_0) + d_3 N''_{3,4}(x_0) = 0, \\ s''(x_n) &= d_{n+1} N''_{n+1,4}(x_n) + d_{n+2} N''_{n+2,4}(x_n) + d_{n+3} N''_{n+3,4}(x_n) = 0. \end{aligned}$$

Zusammengefasst erhalten wir $d_1 = y_0, d_{n+3} = y_n$ sowie das LGS für d_2, d_3, \dots, d_{n+2}

$$\begin{pmatrix} N''_{2,4}(x_0) & N''_{3,4}(x_0) & & & & \\ N_{2,4}(x_1) & N_{3,4}(x_1) & N_{4,4}(x_1) & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & N_{n,4}(x_{n-1}) & N_{n+1,4}(x_{n-1}) & N_{n+1,4}(x_{n-1}) & \\ & & & N''_{n+1,4}(x_n) & N''_{n+2,4}(x_n) & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n+1} \\ d_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -d_1 N''_{1,4}(x_0) \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ -d_{n+3} N''_{n+3,4}(x_n) \end{pmatrix}.$$

(6.17) Beispiel Gesucht ist der interpolierende kubische Spline zu den Wertepaaren $(x_j, y_j), j = 0, 1, 2, 3$, gegeben durch $(0, 0), (1, 2), (3, 1), (4, 4)$.

Der Ansatz

$$s(x) = \sum_{i=1}^6 d_i N_{i,4}(x), \quad n = 3,$$

mit $d_1 = y_0 = 0, d_6 = y_3 = 4$ und

$$N_{1,4}(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -(x-1)^3 & 0 \leq x < 1 \\ 0 & 1 \leq x \end{cases} \quad N_{6,4}(x) = \begin{cases} 0 & x < 3 \\ (x-3)^3 & 3 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
N_{2,4}(x) &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{13}{9}x^3 - 4x^2 + 3x & 0 \leq x < 1 \\ \frac{10}{9} - \frac{2x}{3} + \frac{(x-1)^2}{3} - \frac{(x-1)^3}{18} & 1 \leq x < 3 \\ 0 & 3 \leq x \end{cases} \\
N_{3,4}(x) &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{19}{36}x^3 + x^2 & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{18} + \frac{5x}{12} - \frac{7(x-1)^2}{12} + \frac{5(x-1)^3}{36} & 1 \leq x < 3 \\ \frac{5}{6} - \frac{x}{4} + \frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(x-3)^3}{12} & 3 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x \end{cases} \\
N_{4,4}(x) &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{x^3}{12} & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{1}{6} + \frac{x}{4} + \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{5(x-1)^3}{36} & 1 \leq x < 3 \\ \frac{31}{18} - \frac{5x}{12} - \frac{7(x-3)^2}{12} + \frac{19(x-3)^3}{36} & 3 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x \end{cases} \\
N_{5,4}(x) &= \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \frac{(x-1)^3}{18} & 0 \leq x < 1 \\ -\frac{14}{9} + \frac{2x}{3} + \frac{(x-3)^2}{3} - \frac{13(x-1)^3}{9} & 1 \leq x < 4 \\ 0 & 4 \leq x \end{cases}
\end{aligned}$$

führt auf das LGS

$$\begin{pmatrix} -8 & 2 & 0 & 0 \\ \frac{4}{9} & \frac{17}{36} & \frac{1}{12} & 0 \\ 0 & \frac{1}{12} & \frac{17}{36} & \frac{4}{9} \\ 0 & 0 & 2 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.6 \\ 2 \\ 1 \\ -4.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -24 \end{pmatrix}.$$

mit dem Ergebnis

$$d_2 = \frac{43}{48}, \quad d_3 = \frac{43}{12}, \quad d_4 = -\frac{13}{12}, \quad d_5 = \frac{131}{48}.$$

Da die B-Splines $N_{ik}(x)$ vom Grad $k - 1 = 1, 2, 3$ des öfteren verwendet werden, verschaffen wir uns einen Überblick mit einer Standardunterteilung

$$n = 5, \Delta = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5\} = \{x_0, x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ \Delta_{erw} = \{\xi_{-(k-1)+1}, \xi_{-(k-1)+2}, \dots, \xi_{5+(k-1)}\}.$$

Wir verwenden dazu das CAS Maple.

Maple V (ähnlich bei den weiteren Maple-Versionen) bietet dafür die hilfreiche Funktion

$$\text{bspline}(k-1, x, [x(1), x(2), \dots, x(k+1)]) ,$$

wobei $k-1$ der Grad (Ordnung k) ist, x das Argument in der Funktionsdarstellung sowie die $x(1), \dots, x(k+1)$ die $k+1$ Stützstellenwerte. Damit ist das Intervall $[x(1), x(k+1)]$ der aus k Teilintervallen bestehende Träger des B-Splines $N_{ik}(x)$ mit $\xi_i = x(1)$. Die Berechnung erfolgt mit den Rekursionsbeziehungen.

Einige Berechnungen und Grafik in Maple V

Man beachte die Symmetrie der Splines bez. der Mitte des Intervalls der Stützstellen.

```
> restart:
> with(plots):
> readlib(spline):
> readlib(bspline):

# Splineinterpolation mit B-Splines
# ausgewaehlte B-Splines
> n := 5:
> xi := [0, 1, 2, 3, 4]:

> bspline(1,x,[0,0,1]);
> plot(bspline(1,x,[0,0,1]),x=-1..5,title='N02(x)');
```

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1-x & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

```
> bspline(2,x,[0,0,1,2]);
> plot(bspline(2,x,[0,0,1,2]),x=-1..5,title='N03(x)');
```

$$\begin{cases} 0 & x < 0 \\ -\frac{3}{2}x^2 + 2x & 0 < x < 1 \\ \frac{3}{2} - x + \frac{1}{2}(x-1)^2 & 1 < x < 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$


```
> bspline(3,x,[0,0,1,2,3]);
> plot(bspline(3,x,[0,0,1,2,3]),x=-1..5,title='N04(x)');
```

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & x < 0 \\ -\frac{11}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2 & x < 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}(x-1)^2 + \frac{7}{12}(x-1)^3 & x < 2 \\ \frac{7}{6} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3 & x < 3 \\ 0 & otherwise \end{array} \right.$$

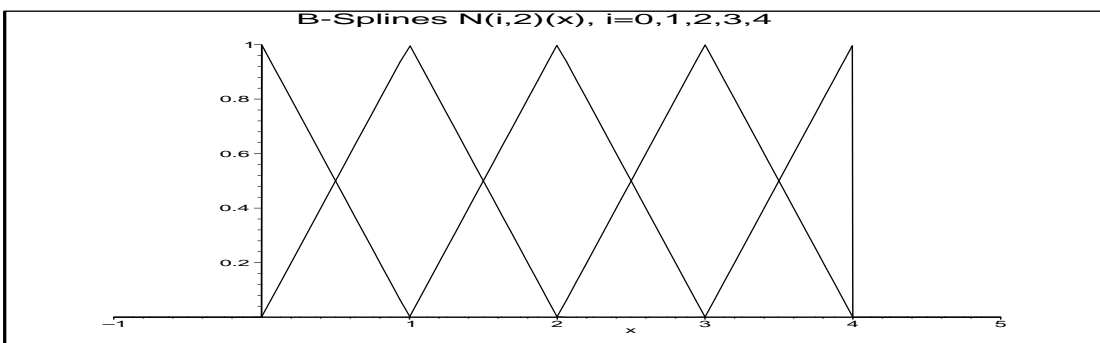
$k = 1$: $\Delta_{erw} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

$k = 2$: $\Delta_{erw} = \{0, 0, 1, 2, 3, 4, 4\}$, $dim = 5$.

$N_{i,2}(x)$	Träger	3. Parameter in bspline()
$N_{0,2}(x)$	$[\xi_0, \xi_2] = [0, 1], \xi_0 = \xi_1$	$[0,0,1]$
$N_{1,2}(x)$	$[\xi_1, \xi_3] = [0, 2]$	$[0,1,2]$
$N_{2,2}(x)$	$[\xi_2, \xi_4] = [1, 3]$	$[1,2,3]$
$N_{3,2}(x)$	$[\xi_3, \xi_5] = [2, 4]$	$[2,3,4]$
$N_{4,2}(x)$	$[\xi_4, \xi_6] = [3, 4], \xi_6 = \xi_5$	$[3,4,4]$

Die “Hütchenfunktionen“ $N_{i,2}(x)$ sind im Beispiel (6.9) schon einmal gezeigt worden.

Abb. 6.8 B-Splines 1. Grades $N_{i,2}(x)$, $i = 0, 1, 2, 3, 4$

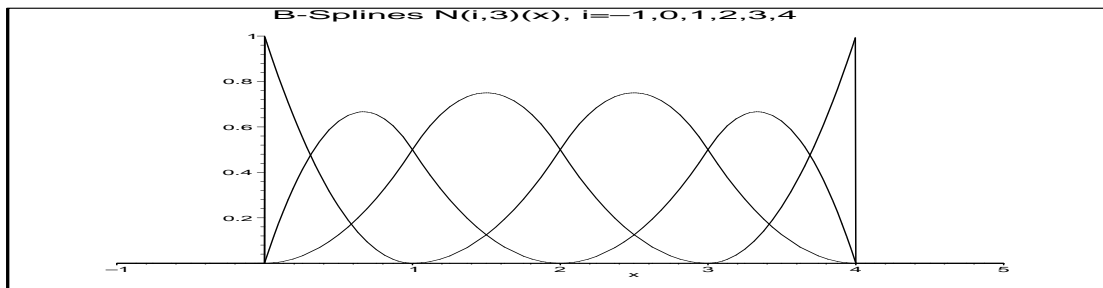


$k = 3$: $\Delta_{erw} = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4\}$, $dim = 6$.

$N_{i,3}(x)$	Träger	3. Parameter in <code>bspline()</code>
$N_{-1,3}(x)$	$[\xi_{-1}, \xi_2] = [0, 1]$, $\xi_{-1} = \xi_1$	$[0, 0, 0, 1]$
$N_{0,3}(x)$	$[\xi_0, \xi_3] = [0, 2]$, $\xi_0 = \xi_1$	$[0, 0, 1, 2]$
$N_{1,3}(x)$	$[\xi_1, \xi_4] = [0, 3]$	$[0, 1, 2, 3]$
$N_{2,3}(x)$	$[\xi_2, \xi_5] = [1, 4]$	$[1, 2, 3, 4]$
$N_{3,3}(x)$	$[\xi_3, \xi_6] = [2, 4]$, $\xi_6 = \xi_5$	$[2, 3, 4, 4]$
$N_{4,3}(x)$	$[\xi_4, \xi_7] = [3, 4]$, $\xi_7 = \xi_5$	$[3, 4, 4, 4]$

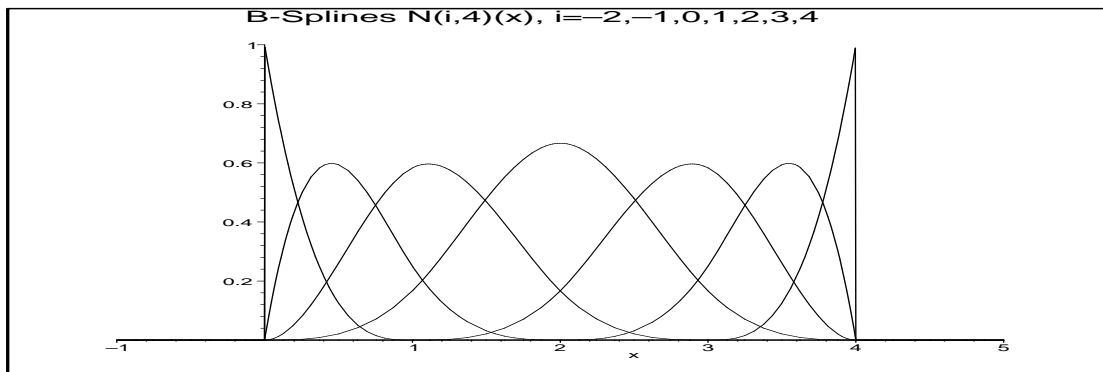
$$\begin{aligned}
 N_{-1,3}(x) &= \begin{cases} (1-x)^2, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} & N_{4,3}(x) &= \begin{cases} (x-3)^2, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 N_{0,3}(x) &= \begin{cases} -\frac{3}{2}x^2 + 2x, & x \in [0, 1] \\ \frac{3}{2} - x + \frac{1}{2}(x-1)^2, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} & N_{3,3}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(x-2)^2, & x \in [2, 3] \\ -\frac{5}{2} + x - \frac{3}{2}(x-3)^2, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 N_{1,3}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2}(x-1)^2, & x \in [1, 2] \\ \frac{1}{2}(3-x)^2, & x \in [2, 3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} & N_{2,3}(x) &= \begin{cases} \frac{1}{2}(x-1)^2, & x \in [1, 2] \\ \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{3}{2}(x-2)^2, & x \in [2, 3] \\ \frac{1}{2}(4-x)^2, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Abb. 6.9 B-Splines 2. Grades $N_{i,3}(x)$, $i = -1, 0, 1, 2, 3, 4$



$k = 4$: $\Delta_{erw} = \{0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, 4, 4, 4, 4\}$, $dim = 7$.

$N_{i,4}(x)$	Träger	3. Parameter in <code>bspline()</code>
$N_{-2,4}(x)$	$[\xi_{-2}, \xi_2] = [0, 1]$, $\xi_{-2} = \xi_1$	$[0, 0, 0, 0, 1]$
$N_{-1,4}(x)$	$[\xi_{-1}, \xi_3] = [0, 2]$, $\xi_{-1} = \xi_1$	$[0, 0, 0, 1, 2]$
$N_{0,4}(x)$	$[\xi_0, \xi_4] = [0, 3]$, $\xi_0 = \xi_1$	$[0, 0, 1, 2, 3]$
$N_{1,4}(x)$	$[\xi_1, \xi_5] = [0, 4]$	$[0, 1, 2, 3, 4]$
$N_{2,4}(x)$	$[\xi_2, \xi_6] = [1, 4]$, $\xi_7 = \xi_5$	$[1, 2, 3, 4, 4]$
$N_{3,4}(x)$	$[\xi_3, \xi_7] = [2, 4]$, $\xi_7 = \xi_5$	$[2, 3, 4, 4, 4]$
$N_{4,4}(x)$	$[\xi_4, \xi_8] = [3, 4]$, $\xi_8 = \xi_5$	$[3, 4, 4, 4, 4]$

Abb. 6.10 B-Splines 3. Grades $N_{i,4}(x)$, $i = -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$ 

$$N_{-2,4}(x) = \begin{cases} (1-x)^3, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{-1,4}(x) = \begin{cases} \frac{7}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{4} - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{3}{4}(x-1)^2 - \frac{1}{4}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{0,4}(x) = \begin{cases} -\frac{11}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2, & x \in [0, 1] \\ \frac{7}{12} + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{5}{4}(x-1)^2 + \frac{7}{12}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{1}{6}(x-2)^3, & x \in [2, 3] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{1,4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & x \in [0, 1] \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{2}(x-1)^2 - \frac{1}{2}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ \frac{4}{6} - (x-2)^2 + \frac{1}{2}(x-2)^3, & x \in [2, 3] \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(x-3) + \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{1}{6}(x-3)^3 = \frac{1}{6}(4-x)^3, & x \in [3, 4] \end{cases}$$

$$N_{2,4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}(x-1)^3, & x \in [1, 2] \\ \frac{1}{6} + \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{2}(x-2)^2 - \frac{7}{12}(x-2)^3, & x \in [2, 3] \\ \frac{7}{12} - \frac{1}{4}(x-3) - \frac{5}{4}(x-3)^2 + \frac{11}{12}(x-3)^3, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{3,4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(x-2)^3, & x \in [2, 3] \\ \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(x-3) + \frac{3}{4}(x-3)^2 - \frac{7}{4}(x-3)^3, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{4,4}(x) = \begin{cases} (x-3)^3, & x \in [3, 4] \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

In **Maple 8** ist die entsprechende Funktion etwas verändert worden.

Basisspline (B-Spline)

```
> restart:
  with(plots):
  with(CurveFitting):
```

The functions `BSpline(k,v)` or `BSpline(k,v,opt)` compute the segment polynomials for the B-spline of order k (degree= $k-1$) in the symbol v on the knot sequence in opt . If opt is not specified, the uniform knot sequence $[0, 1, \dots, k]$ is used.

B-Spline der Ordnung $k = 2$ (Grad $k - 1 = 1$), "Huetchen"

Unterteilung $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

```
> BSpline(2,t);
BSpline(2,t,knots=[0,1,2]): # analog
BSpline(2,t,knots=[a,b,c]);
```

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < 0 \\ t & t < 1 \\ 2-t & t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < a \\ -\frac{-t+a}{b-a} & t < b \\ \frac{-t+b}{c-b} - \frac{-b+a}{b-a} & t < c \\ 0 & c \leq t \end{array} \right.$$

```
> plot(BSpline(2,t),t=-1..5,0..1,thickness=3,
  scaling=constrained,title='B-Spline 1.Grades "Mitte"');
```

```
> # Kontrolle der Zerlegung der 1
  simplify(sum(BSpline(2,t,knots=[k,k,k]+[0,1,2]),
    k=-infinity..infinity));
  simplify(sum(BSpline(2,t,knots=[k,k,k]+[0,1,2]),k=-10..10));
```

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < k \\ t-k & t < 1+k \\ 2-t+k & t < 2+k \\ 0 & 2+k \leq t \end{array} \right. \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < -10 \\ 10+t & t < -9 \\ 1 & t < 11 \\ 12-t & t < 12 \\ 0 & 12 \leq t \end{array} \right.$$

```
> BSpline(2,t,knots=[0,0,1]);
plot(BSpline(2,t,knots=[0,0,1]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
      scaling=constrained,title='B-Spline 1.Grades "links"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1-t & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

```
> BSpline(2,t,knots=[3,4,4]);
plot(BSpline(2,t,knots=[3,4,4]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
      scaling=constrained,title='B-Spline 1.Grades "rechts"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 3 \\ -3+t & 3 \leq t < 4 \\ 0 & 4 \leq t \end{cases}$$

B-Spline der Ordnung $k = 3$ (Grad $k - 1 = 2$), "quadratische Parabel"
Unterteilung $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

```
> BSpline(3,t);
plot(BSpline(3,t),t=-1..5,0..1,thickness=3,
      scaling=constrained,title='B-Spline 2.Grades "Mitte"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{t^2}{2} & 0 \leq t < 1 \\ -\frac{1}{2} + t - (t-1)^2 & 1 \leq t < 2 \\ \frac{5}{2} - t + \frac{(-2+t)^2}{2} & 2 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t \end{cases}$$

```
> BSpline(3,t,knots=[0,0,0,1]);
plot(BSpline(3,t,knots=[0,0,0,1]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
      scaling=constrained,title='B-Spline 2.Grades "links"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^2 - 2t + 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{cases}$$

```
> BSpline(3,t,knots=[0,0,1,2]);
plot(BSpline(3,t,knots=[0,0,1,2]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
      scaling=constrained,title='B-Spline 2.Grades "fast links"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\frac{3}{2}t^2 + 2t & 0 \leq t < 1 \\ \frac{3}{2} - t + \frac{(t-1)^2}{2} & 1 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{cases}$$

```
> BSpline(3,t,knots=[2,3,4,4]);
plot(BSpline(3,t,knots=[2,3,4,4]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 2.Grades "fast rechts"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 2 \\ \frac{(-2+t)^2}{2}t^2 + 2t & t < 3 \\ -\frac{5}{2} + t - \frac{3(-3+t)^2}{2} & t < 4 \\ 0 & 4 \leq t \end{cases}$$

```
> BSpline(3,t,knots=[3,4,4,4]);
plot(BSpline(3,t,knots=[3,4,4,4]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 2.Grades "rechts"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 3 \\ (-3+t)^2 & t < 4 \\ 0 & 4 \leq t \end{cases}$$

Unterteilung $\{0, 1, 2, 3\}$

```
> BSpline(3,t,knots=[1,2,3,3]);
plot(BSpline(3,t,knots=[1,2,3,3]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 2.Grades "fast rechts"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{(t-1)^2}{2} & t < 2 \\ -\frac{3}{2} + t - \frac{3(-2+t)^2}{2} & t < 3 \\ 0 & 3 \leq t \end{cases}$$

```
> BSpline(3,t,knots=[2,3,3,3]);
plot(BSpline(3,t,knots=[2,3,3,3]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 2.Grades "rechts"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 2 \\ (-2+t)^2 & t < 3 \\ 0 & 3 \leq t \end{cases}$$

B-Spline der Ordnung $k = 4$ (Grad $k - 1 = 3$), "kubische Parabel" Unterteilung $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

```
> BSpline(4,t);
plot(BSpline(4,t),t=-1..5,0..1,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 3.Grades "Mitte"');
```

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < 0 \\ \frac{t^3}{6} & 0 \leq t < 1 \\ -\frac{1}{3} + \frac{t}{2} + \frac{(t-1)^2}{2} - \frac{(t-1)^3}{2} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{2}{3} - (-2+t)^2 + \frac{(-2+t)^3}{2} & 2 \leq t < 3 \\ \frac{5}{3} - \frac{t}{2} + \frac{(-3+t)^2}{2} - \frac{(-3+t)^3}{6} & 3 \leq t < 4 \\ 0 & 4 \leq t \end{array} \right.$$

```
> BSpline(4,t,knots=[0,0,0,0,1]);
plot(BSpline(4,t,knots=[0,0,0,0,1]),t=-1..5,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 3.Grades "links"');
```

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < 0 \\ -t^3 + 3t^2 - 3t + 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & 1 \leq t \end{array} \right.$$

```
> t := 't':
b3 := BSpline(4,t,knots=[0,0,0,1,2]);
plot(BSpline(4,t,knots=[0,0,0,1,2]),t=-1..5,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 3.Grades "fast links"');
t := 1;
b3;
```

$$b3 := \left\{ \begin{array}{ll} 0 & t < 0 \\ \frac{7}{4}t^3 - \frac{9}{2}t^2 + 3t & 0 \leq t < 1 \\ 1 - \frac{3t}{4} + \frac{3(t-1)^2}{4} - \frac{(t-1)^3}{4} & 1 \leq t < 2 \\ 0 & 2 \leq t \end{array} \right.$$

$$t := 1$$

$$\frac{1}{4}$$

```
> t := 't':
b3 := BSpline(4,t,knots=[0,0,1,2,3]);
plot(BSpline(4,t,knots=[0,0,1,2,3]),t=-1..5,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 3.Grades "noch weniger links"');
t := 1; b3; # Funktionswerte
t := 2; b3;
```

$$b_3 := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ -\frac{11}{12}t^3 + \frac{3}{2}t^2 & 0 \leq t < 1 \\ \frac{1}{3} + \frac{t}{4} - \frac{5(t-1)^2}{4} + \frac{7(t-1)^3}{12} & 1 \leq t < 2 \\ \frac{7}{6} - \frac{t}{2} - \frac{(-2+t)^2}{2} - \frac{(-2+t)^3}{6} & 2 \leq t < 3 \\ 0 & 3 \leq t \end{cases}$$

```
> t := 't':
BSpline(4,t,knots=[1,2,3,4,4]);
plot(BSpline(4,t,knots=[1,2,3,4,4]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 3.Grades "noch weniger rechts"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 1 \\ \frac{(t-1)^3}{6} & 1 \leq t < 2 \\ -\frac{5}{6} + \frac{t}{2} + \frac{(-2+t)^2}{2} - \frac{7(-2+t)^3}{12} & 2 \leq t < 3 \\ \frac{4}{3} - \frac{t}{4} - \frac{5(-3+t)^2}{4} + \frac{11(-3+t)^3}{12} & 3 \leq t < 4 \\ 0 & 4 \leq t \end{cases}$$

```
> BSpline(4,t,knots=[2,3,4,4,4]);
plot(BSpline(4,t,knots=[2,3,4,4,4]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 3.Grades "fast rechts"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 2 \\ \frac{(-2+t)^3}{4} & 2 \leq t < 3 \\ -2 + \frac{3t}{4} + \frac{3(-3+t)^2}{4} - \frac{7(-3+t)^3}{4} & 3 \leq t < 4 \\ 0 & 4 \leq t \end{cases}$$

```
> BSpline(4,t,knots=[3,4,4,4,4]);
plot(BSpline(4,t,knots=[3,4,4,4,4]),t=-1..5,0..1,thickness=3,
scaling=constrained,title='B-Spline 3.Grades "rechts"');
```

$$\begin{cases} 0 & t < 3 \\ (-3+t)^3 & 3 \leq t < 4 \\ 0 & 4 \leq t \end{cases}$$

Die k -fache Wiederholung der ersten und letzten Stützstelle kann man auch umgehen. Der “innere“ Standard-B-Spline $N_{ik}(x)$ mit seinem Träger $[\xi_i, \xi_{i+k}]$ wird einfach nach links und rechts verschoben, so dass an den Rändern keine Extraformeln zu berechnen sind. Was von diesen B-Splines über das Stützstellenintervall hinausgeht, wird einfach abgeschnitten. Man spricht dann auch von abgebrochenen B-Splines.

Für den Fall äquidistanter Stützstellen

$$x_i = x_0 + ih, \quad x_0 = a, \quad h = \frac{b-a}{n},$$

vergrößert man die Unterteilung um die Punkte x_{-3}, x_{-2}, x_{-1} links und $x_{n+1}, x_{n+2}, x_{n+3}$ rechts und definiert somit modifizierte Basisfunktionen 3. Grades.

(6.18) Definition Globale kubische Basissplines

Der globale kubische Basisspline $\tilde{N}_{i,4}(x) \in \mathcal{C}^2(-\infty, \infty)$ mit seinem kompakten Träger $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ ist intervallweise definiert und hat die Form

$$\tilde{N}_{i,4}(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3, & x \in [x_{i-2}, x_{i-1}], \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ (x_{i+2} - x)^3, & x \in [x_{i+1}, x_{i+2}], \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Man kann nachprüfen, dass $\tilde{N}_{i,4}(x)$ folgende Funktions- und Ableitungswerte an den Stützstellen hat.

Tab. 6.2 $\tilde{N}_{i,4}(x)$ und seine ersten Ableitungen bei x_j

	x_{i-2}	x_{i-1}	x_i	x_{i+1}	x_{i+2}	sonst
$\tilde{N}_{i,4}(x_j)$	0	1	4	1	0	0
$[\tilde{N}_{i,4}(x_j)]'$	0	$3/h$	0	$-3/h$	0	0
$[\tilde{N}_{i,4}(x_j)]''$	0	$6/h^2$	$-12/h^2$	$6/h^2$	0	0

Die Funktionen $\tilde{N}_{i,4}(x)$, $i = -1, 0, \dots, n, n+1$, stellen eine Basis für den Raum $\mathcal{S}_{4,\Delta}$ dar. Es gilt

$$s(x) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \tilde{N}_{i,4}(x).$$

Die $n+3$ Unbekannten c_i ergeben sich aus der Interpolationsforderung

$$y_j = s(x_j) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i \tilde{N}_{i,4}(x_j), \quad j = 0, 1, \dots, n,$$

sowie 2 zusätzlichen Bedingungen, wie z.B. bei natürlichen Splines, der Gestalt

$$0 = s''(x_0) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i [\tilde{N}_{i,4}(x_0)]'', \quad 0 = s''(x_n) = \sum_{i=-1}^{n+1} c_i [\tilde{N}_{i,4}(x_n)]''.$$

Somit gelangen wir auf die Lösung eines LGS mit einer Koeffizientenmatrix in “Fast“-Tridiagonalform.

$$\begin{pmatrix} \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} & & 0 \\ 1 & 4 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & 1 & 4 & 1 \\ 0 & & & \frac{6}{h^2} & -\frac{12}{h^2} & \frac{6}{h^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_n \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \\ y_1 \\ \dots \\ y_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Man eliminiert die beiden Nichtnullkomponenten außerhalb des Tridiagonalbandes und löst dann das LGS mit Gauß-Elimination.

Für jedes Teilintervall $[x_i, x_{i+1}]$ ergibt sich der lokale kubische Spline

$$s^{(i)}(x) = c_{i-1} \tilde{N}_{i-1,4}(x) + c_i \tilde{N}_{i,4}(x) + c_{i+1} \tilde{N}_{i+1,4}(x) + c_{i+2} \tilde{N}_{i+2,4}(x), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Die vier Beiträge der B-Splines auf diesem Intervall bezeichnet man als lokale kubische Basisfunktionen.

Auch die anderen Endbedingungen kann man analog einbeziehen.

Abschließend noch die Formel für eine lokale kubische Splinefunktion auf der Basis von Funktionswerten und 1. Ableitungen.

(6.19) Satz Ein interpolierender kubischer Spline lässt sich auf dem Intervall $[x_i, x_{i+1}]$ wie folgt darstellen.

$$\begin{aligned} s^{(i)}(x) &= y_i + \lambda_i(x - x_i) + \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \lambda_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i)^2 \\ &\quad + \frac{\lambda_{i+1} - 2\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} + \lambda_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} (x - x_i)^2 (x - x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

Bei dem angegebenen Polynom handelt es sich um das kubische Hermiteische Interpolationspolynom zu den Daten (x_i, y_i, λ_i) , $(x_{i+1}, y_{i+1}, \lambda_{i+1})$, d. h. es gilt

$$\left. \begin{aligned} s^{(i)}(x_i) &= y_i, & s^{(i)}(x_{i+1}) &= y_{i+1} \\ s^{(i)}(x_i)' &= \lambda_i, & s^{(i)}(x_{i+1})' &= \lambda_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Beweis Man prüfe die Interpolationsbedingungen nach. □

6.5 Krümmung einer Kurve

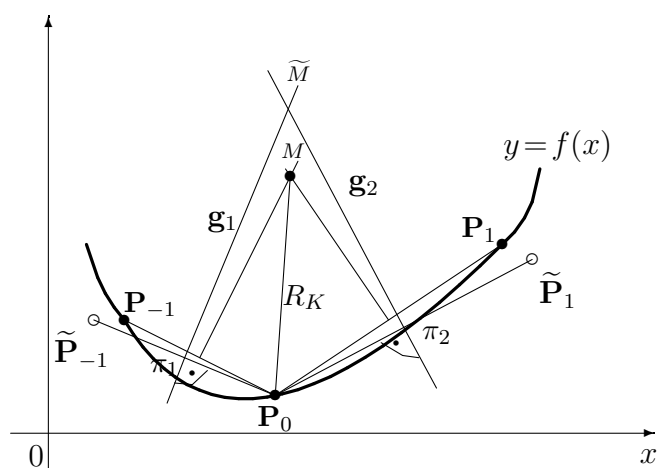
Gegeben sei eine zweimal stetig differenzierbare Kurve $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und ein $x \in (a, b)$ mit $f''(x) \neq 0$.

Hergeleitet werden soll die Definition des Krümmungsradius an f in x .

Konstruktion des Schmiegekreises an f in x

Sei $y = f(x)$, $y' = f'(x)$, $y'' = f''(x)$. Man wähle $h > 0$ und bestimme den Kreis durch die Punkte $\{\mathbf{P}_{-1}, \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\} = \{(x-h, f(x-h)), (x, f(x)), (x+h, f(x+h))\}$ mit dem Mittelpunkt M .

Abb. 6.12 Geometrische Erläuterung zum Schmiegekreis, hier durch die Punkte $\{\mathbf{P}_{-1}, \mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1\} = \{(x-h_1, f(x-h_1)), (x, f(x)), (x+h_2, f(x+h_2))\}$



Dann ist

$$\mathbf{P}_{-1} = (x-h, f(x-h)) \approx (x-h, y - hy' + h^2/2 y'') = \tilde{\mathbf{P}}_{-1},$$

$$\mathbf{P}_1 = (x+h, f(x+h)) \approx (x+h, y + hy' + h^2/2 y'') = \tilde{\mathbf{P}}_1.$$

Die Geraden \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 seien die Mittelsenkrechten auf den Verbindungsstrecken $\overline{\tilde{\mathbf{P}}_{-1}\mathbf{P}_0}$ und $\overline{\mathbf{P}_0\tilde{\mathbf{P}}_1}$, also

$$\mathbf{g}_1 = \pi_1 + \lambda \cdot \mathbf{v}_1, \quad \mathbf{g}_2 = \pi_2 + \mu \cdot \mathbf{v}_2$$

mit

$$\pi_1 = \frac{1}{2}(\tilde{\mathbf{P}}_{-1} + \mathbf{P}_0) = \frac{1}{2}(2x-h, 2y - hy' + h^2/2 y''),$$

$$\pi_2 = \frac{1}{2}(\mathbf{P}_0 + \tilde{\mathbf{P}}_1) = \frac{1}{2}(2x+h, 2y + hy' + h^2/2 y''),$$

und senkrechten Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, z. B.

$$\overline{\tilde{\mathbf{P}}_{-1}\mathbf{P}_0} \perp \mathbf{v}_1, \quad \overline{\mathbf{P}_0\tilde{\mathbf{P}}_1} \perp \mathbf{v}_2,$$

$$\mathbf{v}_1 = (y' - h/2 y'', -1), \quad \mathbf{v}_2 = (y' + h/2 y'', -1),$$

$$\mathbf{P}_0 - \tilde{\mathbf{P}}_{-1} = (h, hy' - h^2/2 y'') = h(1, y' - h/2 y'') \perp (y' - h/2 y'', -1).$$

\widetilde{M} als Schnittpunkt der Geraden \mathbf{g}_1 und \mathbf{g}_2 führt auf die zwei Bedingungen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(2x - h) + \lambda(y' - \frac{h}{2}y'') &= \frac{1}{2}(2x + h) + \mu(y' + \frac{h}{2}y''), \\ \frac{1}{2}(2y - hy' + \frac{h^2}{2}y'') - \lambda &= \frac{1}{2}(2y + hy' + \frac{h^2}{2}y'') - \mu. \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung liefert $\lambda = \mu - hy'$. Durch Einsetzen in die erste Gleichung erhält man

$$-\mu y'' - y'^2 - \frac{h}{2}y'y'' = 1.$$

Im Limes $h \rightarrow 0$ folgt $\widetilde{M} \rightarrow M$ und $\mu = (1 + y'^2)/(-y'')$. Der Schnittpunkt der Geraden $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2$ liegt dann bei

$$M = (M_1, M_2) = (x_0, y_0) = (x + \mu y', y - \mu).$$

Der Radius des gesuchten Kreises ist

$$\begin{aligned} R_K &= [(M_1 - \mathbf{P}_{0,1})^2 + (M_2 - \mathbf{P}_{0,2})^2]^{1/2} \\ &= |\mu| \sqrt{y'^2 + 1} \\ &= \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}. \end{aligned}$$

(6.20) Definition Schmiegekreis mit seinen Eigenschaften

Der Kreis mit dem Mittelpunkt M und Radius R_K heißt Schmiegekreis an f in x . R_K ist der **Krümmungsradius**, die inverse Größe

$$K = \frac{1}{R_K} = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

die **Krümmung** von f in x .

Glättungseigenschaften kubischer Splines

Als Maß für die Krümmung von f in x kann also $f''(x)$ betrachtet werden. Ein Maß für die Krümmung im Intervall $[a, b]$ ist die integrale Größe

$$\|f''\|_2 = \left(\int_a^b [f''(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Diese wird durch gewisse kubische Splines minimiert, wie der nachfolgende Satz zeigt.

(6.21) Satz Gegeben seien eine Unterteilung $\Delta = \{a = \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{l+1} = b\}$ und eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

$p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine f interpolierende Funktion, d. h. es gelte $p(\xi_i) = f(\xi_i)$, $i = 0, 1, \dots, l+1$.

Ist s ein interpolierender kubischer Spline von f mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$[s''(x)(p'(x) - s'(x))]_{x=a}^b = 0,$$

so ist $\|s''\|_2 \leq \|p''\|_2$.

Beweis Aus $p'' = s'' + (p'' - s'')$ folgt

$$\int_a^b (p'')^2 dx = \int_a^b (s'')^2 dx + 2 \underbrace{\int_a^b s''(p'' - s'') dx}_{(*)} + \underbrace{\int_a^b (p'' - s'')^2 dx}_{\geq 0} \geq \int_a^b (s'')^2 dx,$$

falls $(*)$ verschwindet. Mittels partieller Integration und nach Voraussetzung gilt

$$\int_a^b s''(p'' - s'') dx = [s''(p' - s')]_a^b - \int_a^b s'''(p' - s') dx = - \int_a^b s'''(p' - s') dx.$$

Nach Definition ist s''' stückweise konstant und $s'''(x) = \sigma_i$ für $x \in (\xi_i, \xi_{i+1})$.

Daher ist

$$\int_a^b s''(p'' - s'') dx = - \sum_{i=0}^l \sigma_i \int_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} (p' - s') dx = - \sum_{i=0}^l \sigma_i [p(x) - s(x)]_{\xi_i}^{\xi_{i+1}} = 0$$

wegen der Interpolationseigenschaft. □

(6.22) Folgerung Sei s ein kubischer Interpolationsspline. Ist p eine weitere zweimal stetig differenzierbare interpolierende Funktion, und erfüllt s die ergänzenden natürlichen Randbedingungen oder erfüllen s und p gleichzeitig eine der Bedingungen $s''(a) = s''(b) = 0$ oder $s'(a) = p'(a)$, $s'(b) = p'(b)$, so ist $\|s''\|_2 \leq \|p''\|_2$.

Beweis Analog zum Beweis des vorherigen Satzes.

Nach Voraussetzung gilt $[s''(x)(p'(x) - s'(x))]_{x=a}^b = 0$. □

6.6 Parametrische kubische Splines

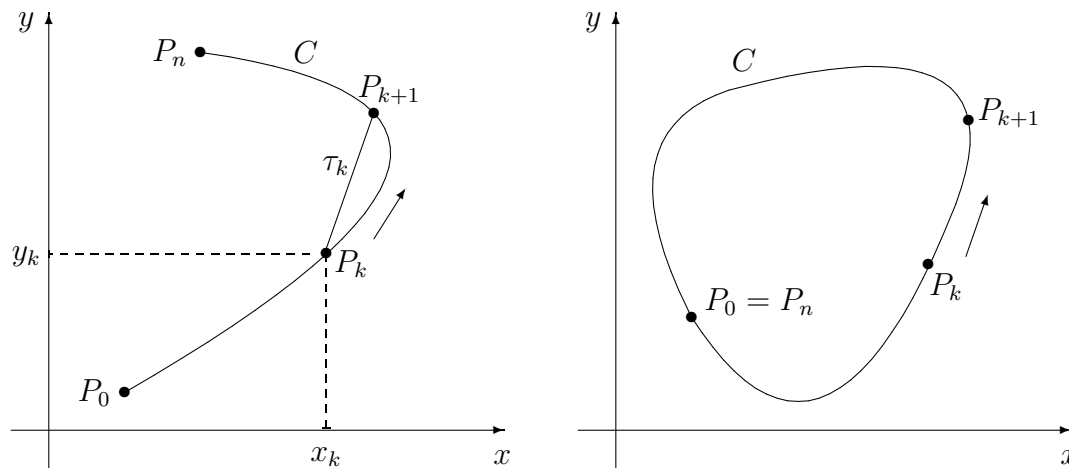
Sie dienen zur Kurvendarstellung. Ziel ist dabei die Interpolation mit entsprechenden Glattheit der punktweise gegebenen Kurve in \mathbb{R}^2

$$C = \{P_k \mid P_k = (x_k, y_k), k = 0, 1, \dots, n\}.$$

Die Parameterdarstellung von C sei

$$x = x(t), y = y(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Abb. 6.13 Offene bzw. geschlossene Kurven in der Ebene mit Parametrisierung



Algorithmus für parametrische Splines

- Bestimmung der t -Werte t_k zu $x_k = x(t_k)$, $y_k = y(t_k)$.
Approximation der Bogenlänge zwischen $P_k = (x_k, y_k)$ und $P_{k+1} = (x_{k+1}, y_{k+1})$ durch die Verbindungsstrecke

$$\tau_k = t_{k+1} - t_k = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2},$$

$$t_{k+1} = t_k + \tau_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1, \quad t_0 = 0.$$

- Interpolation der zwei Funktionen $x(t)$, $y(t)$ durch kubische Splinefunktionen $s_x(t)$, $s_y(t)$ mit

$$s_x(t_k) = x_k, \quad s_y(t_k) = y_k, \quad k = 0, 1, \dots, n,$$

und den Glattheitsforderungen für kubische Splines.

- (6.23) Bemerkung** (a) Sinnvoll ist die Approximation offener Kurven durch natürliche Splines sowie die Approximation geschlossener Kurven durch periodische Splines.
(b) Die Approximation von Raumkurven $(x(t), y(t), z(t))$, $a \leq t \leq b$, kann analog erfolgen unter Einbeziehung der Werte z_k .

6.7 Berechnung kubischer Splines mittels Bézier-Kurven

Wir bestimmen den kubischen Spline der Ordnung $k = 4$ mit der Stützstellenfolge $\Delta_1 = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$.

Die zugehörige erweiterte Stützstellenfolge ist

$$\Delta_{erw} = \{\xi_{-2}, \xi_{-1}, \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n, \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \xi_{n+3}\},$$

wobei $\xi_{-2} = \xi_{-1} = \xi_0 = \xi_1$, $\xi_n = \xi_{n+1} = \xi_{n+2} = \xi_{n+3}$, $\dim = n - 1 - (-3) = n + 2$.

Zu einer gegebenen Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ finde man den kubischen Spline $s(t)$, der an den Stützstellen ξ_i , $i = 1, \dots, n$, die n Interpolationsbedingungen $s(\xi_i) = f(\xi_i)$ erfüllt.

(A) Der erste Ansatz ist die B-Spline-Darstellung

$$s(t) = \sum_{i=-2}^{n-1} d_i N_{i,4}(t)$$

mit den $\dim = n+2$ unbekannten Koeffizienten d_i . Die verbleibenden zwei Freiheitsgrade sind, wie schon erwähnt, durch zwei zusätzliche Forderungen zu binden.

Tab. 6.3 Trägerintervalle der B-Splines $N_{i,4}(t)$

$N_{i,4}(t)$	kompakte Träger
$N_{-2,4}(t)$	$[\xi_{-2}, \xi_2] = [\xi_1, \xi_2]$
$N_{-1,4}(t)$	$[\xi_{-1}, \xi_3] = [\xi_1, \xi_3]$
$N_{0,4}(t)$	$[\xi_0, \xi_4] = [\xi_1, \xi_4]$
$N_{1,4}(t)$	$[\xi_1, \xi_5]$
...	...
$N_{i,4}(t)$	$[\xi_i, \xi_{i+4}]$
...	...
$N_{n-2,4}(t)$	$[\xi_{n-2}, \xi_{n+2}] = [\xi_{n-2}, \xi_n]$
$N_{n-1,4}(t)$	$[\xi_{n-1}, \xi_{n+3}] = [\xi_{n-1}, \xi_n]$

(B) Die Berechnung kubischer Splines erfolgt nun als zusammengesetzte Bézier-Kurve unter Verwendung von zusätzlichen Punkten in den Teilintervallen.

Mit $[\xi_i, \xi_{i+4}]$ als Träger von $N_{i,4}$ ist $N_{i,4}(\xi_i) = N_{i,4}(\xi_{i+4}) = 0$. Man definiere

$$\alpha_i = N_{i-3,4}(\xi_i), \quad \beta_i = N_{i-2,4}(\xi_i), \quad \gamma_i = N_{i-1,4}(\xi_i).$$

Sei weiterhin $\Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$ und die $\Delta\xi_i$ alle gleich, d. h. eine äquidistante Parametrisierung ist gegeben.

Der allgemeine Ansatz

$$s(t) = \sum_{i=-2}^{n-1} \mathbf{d}_i N_{i,4}(t)$$

mit den Hilfspunkten \mathbf{d}_i führt wegen der Endpunkteigenschaften auf

$$\mathbf{x}_1 = \sum_{k=-2}^{n-1} \mathbf{d}_k N_{k,4}(\xi_1) = \mathbf{d}_{-2}, \quad \mathbf{x}_n = \sum_{k=-2}^{n-1} \mathbf{d}_k N_{k,4}(\xi_n) = \mathbf{d}_{n-1},$$

und für die inneren Koeffizienten bei $t = \xi_i$ auf die Gleichung

$$\mathbf{x}_i = \sum_{k=-2}^{n-1} \mathbf{d}_k N_{k,4}(\xi_i).$$

Davon bleiben nur drei Summanden übrig.

$$\mathbf{x}_i = \alpha_i \mathbf{d}_{i-3} + \beta_i \mathbf{d}_{i-2} + \gamma_i \mathbf{d}_{i-1}.$$

Diese Hilfspunkte \mathbf{d}_i bezeichnet man auch als *de Boor-Ordinaten*. Sie bilden das B-Spline-Polygon.

Die Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ sollen indirekt bestimmt werden, um dann im nächsten Schritt die Punkte \mathbf{d}_i mittels eines LGS zu ermitteln.

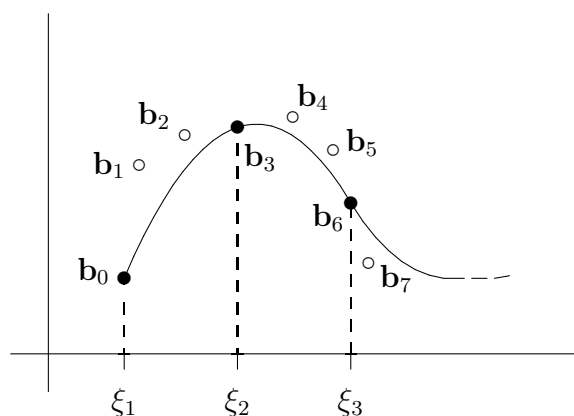
Andererseits kennt man die formale Darstellung von $s(t)$ als zusammengesetzte Bézier-Kurve. Auf jedem Teilintervall $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, kann man mittels der kubischen Bernstein-Polynome die Formel

$$s(t) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{b}_{3(i-1)+j} B_j^3 \left(\frac{t - \xi_i}{\Delta \xi_i} \right)$$

notieren.

Die hierbei verwendeten Kontrollkoeffizienten \mathbf{b}_k , $k = 0, 1, \dots, 3(n-1)$, aus allen Teilintervallen nennt man auch *de Boor-Punkte*.

Abb. 6.14 Lage der ersten Kontrollkoeffizienten \mathbf{b}_j



(a) Aus der Interpolationsbedingung folgt $s(\xi_i) = \mathbf{b}_{3(i-1)} = \mathbf{x}_i$.

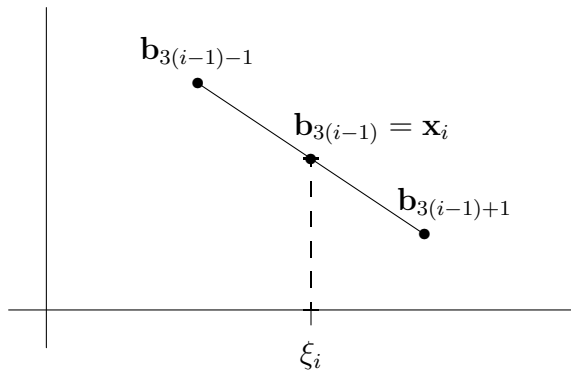
(b) Stetige erste Ableitung in $t = \xi_i$ heißt

$$\mathbf{b}_{3(i-1)} - \mathbf{b}_{3(i-1)-1} = \lambda(\mathbf{b}_{3(i-1)+1} - \mathbf{b}_{3(i-1)}), \quad \lambda = 1,$$

und daraus folgt mit (a)

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{3(i-1)-1} + \mathbf{b}_{3(i-1)+1} &= 2\mathbf{b}_{3(i-1)}, \\ \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{3(i-1)-1} + \mathbf{b}_{3(i-1)+1}) &= \mathbf{x}_i. \end{aligned}$$

Der Punkt \mathbf{x}_i ist damit der Mittelpunkt der Verbindungslinie von $\mathbf{b}_{3(i-1)-1}$ nach $\mathbf{b}_{3(i-1)+1}$.

Abb. 6.15 Mittelpunkteigenschaft von Kontrollkoeffizienten $\mathbf{x}_i = \mathbf{b}_{3(i-1)}$ 

(c) Die stetige zweite Ableitung gemäß

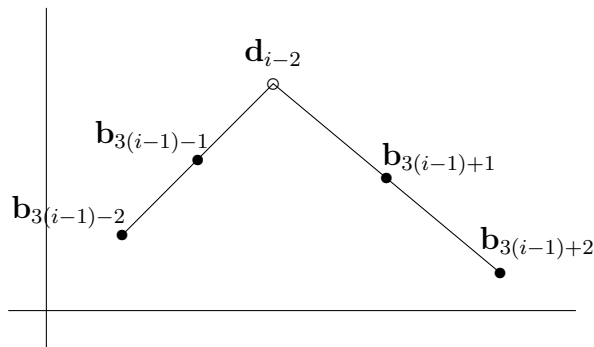
$$\mathbf{b}_{3(i-1)-2} - 2\mathbf{b}_{3(i-1)-1} + \mathbf{b}_{3(i-1)} = \mu(\mathbf{b}_{3(i-1)+2} - 2\mathbf{b}_{3(i-1)+1} + \mathbf{b}_{3(i-1)}), \quad \mu = 1,$$

ergibt

$$2\mathbf{b}_{3(i-1)-1} - \mathbf{b}_{3(i-1)-2} = 2\mathbf{b}_{3(i-1)+1} - \mathbf{b}_{3(i-1)+2} = \mathbf{d}_{i-2}.$$

Damit sind die Punkte $\mathbf{b}_{3(i-1)\pm 1}$ die Mitten der Verbindungsstrecken von \mathbf{d}_{i-2} nach $\mathbf{b}_{3(i-1)\pm 2}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_{3(i-1)-1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{3(i-1)-2} + \mathbf{d}_{i-2}), \\ \mathbf{b}_{3(i-1)+1} &= \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{3(i-1)+2} + \mathbf{d}_{i-2}). \end{aligned}$$

Abb. 6.16 Lage von Kontrollkoeffizienten $\mathbf{b}_{3(i-1)\pm l}$ und Punkten \mathbf{d}_{i-2} 

(6.24) Bemerkung Die Punkte \mathbf{d}_{i-2} sind die Kontrollpunkte der B-Spline-Darstellung.

Aus der Definition der \mathbf{d}_{i-2} folgen mit den Beziehungen

$$\mathbf{d}_{i-2} = 2\mathbf{b}_{3(i-1)-1} - \mathbf{b}_{3(i-1)-2},$$

$$\mathbf{d}_{i-2} = 2\mathbf{b}_{3(i-1)+1} - \mathbf{b}_{3(i-1)+2} \xrightarrow{i \rightarrow i-1} \mathbf{d}_{i-3} = 2\mathbf{b}_{3(i-1)-2} - \mathbf{b}_{3(i-1)-1}$$

ihre Linearkombination

$$2\mathbf{d}_{i-2} + \mathbf{d}_{i-3} = 3\mathbf{b}_{3(i-1)-1},$$

ähnlich mit

$$\mathbf{d}_{i-2} = 2\mathbf{b}_{3(i-1)+1} - \mathbf{b}_{3(i-1)+2},$$

$$\mathbf{d}_{i-2} = 2\mathbf{b}_{3(i-1)-1} - \mathbf{b}_{3(i-1)-2} \xrightarrow{i \rightarrow i+1} \mathbf{d}_{i-1} = 2\mathbf{b}_{3(i-1)+2} - \mathbf{b}_{3(i-1)+1}$$

die Beziehung

$$2\mathbf{d}_{i-2} + \mathbf{d}_{i-1} = 3\mathbf{b}_{3(i-1)+1}.$$

Wiederum durch Addition der beiden Kombinationen erhält man unter Berücksichtigung der Beziehung für die erste Ableitung für die inneren Punkte $i = 3, 4, \dots, n-2$ die Gleichung

$$\mathbf{d}_{i-3} + 4\mathbf{d}_{i-2} + \mathbf{d}_{i-1} = 3(\mathbf{b}_{3(i-1)-1} + \mathbf{b}_{3(i-1)+1}) = 6\mathbf{b}_{3(i-1)} = 6\mathbf{x}_i.$$

Die beiden Bézier-Punkte $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{3(n-1)-1}$ wählt man zunächst beliebig, und man setzt

$$\mathbf{d}_{-1} = \mathbf{b}_1, \quad \mathbf{d}_{n-2} = \mathbf{b}_{3(n-1)-1}.$$

An diese werden die Zusatzbedingungen gekoppelt.

In den beiden äußeren Intervallen gelten spezielle Formeln, die noch zu beschreiben sind.

Insgesamt erhalten wir ein lineares Gleichungssystem der Form

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & & & \\ & & * & * & * & & & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & & & 1 & 4 & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & & & 1 & 4 & 1 & & \\ & & & & & & & * & * & * & \\ & & & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{-2} \\ \mathbf{d}_{-1} \\ \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{n-4} \\ \mathbf{d}_{n-3} \\ \mathbf{d}_{n-2} \\ \mathbf{d}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{b}_1 \\ * \\ 6\mathbf{x}_3 \\ 6\mathbf{x}_4 \\ \vdots \\ 6\mathbf{x}_{n-2} \\ * \\ \mathbf{b}_{3(n-1)-1} \\ \mathbf{x}_n = \mathbf{b}_{3(n-1)} \end{pmatrix}.$$

Die Zeilen mit den Sternen gehören zu den äußeren Intervallen.

Die Zeilen mit $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{3(n-1)-1}$ hängen von den zu ergänzenden Randbedingungen ab.

(1) Betrachtung der beiden äußeren Intervalle

Dazu verwenden wir die verschiedenen Mittelpunkteigenschaften der Kontrollkoeffizienten, so “links“ die Beziehungen

$$\mathbf{b}_{3(i-1)-1} = \frac{1}{2}(\mathbf{b}_{3(i-1)-2} + \mathbf{d}_{i-2}),$$

$$3\mathbf{b}_{3(i-1)+1} = 2\mathbf{d}_{i-2} + \mathbf{d}_{i-1}.$$

Bei $i = 2$ folgen daraus

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{d}_0) = \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{-1} + \mathbf{d}_0), \\ 3\mathbf{b}_4 &= 2\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1, \\ 6\mathbf{x}_2 &= 3(\mathbf{b}_2 + \mathbf{b}_4) = \frac{3}{2}\mathbf{d}_{-1} + \frac{7}{2}\mathbf{d}_0 + \mathbf{d}_1. \end{aligned}$$

Analog gilt

$$6\mathbf{x}_{n-1} = 3(\mathbf{b}_{3(n-2)-1} + \mathbf{b}_{3(n-2)+1}) = \mathbf{d}_{n-4} + \frac{7}{2}\mathbf{d}_{n-3} + \frac{3}{2}\mathbf{d}_{n-2}.$$

(2) Einbeziehung der natürlichen Randbedingungen

Dazu betrachten wir die zweiten Differenzen am Rand, die wegen Krümmung=0 verschwinden.

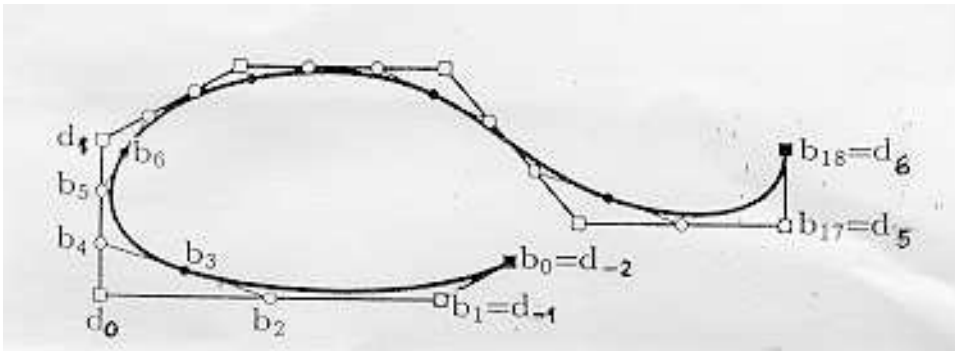
$$\begin{aligned} \text{“links“} \quad 0 &= \Delta^2 \mathbf{b}_0 = \mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0, \\ \mathbf{b}_0 &= \mathbf{x}_1 = \mathbf{d}_{-2}, \\ \mathbf{b}_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{-1} + \mathbf{d}_0), \\ 0 &= \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{-1} + \mathbf{d}_0) - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{x}_1, \\ 2\mathbf{b}_1 &= \frac{1}{2}\mathbf{d}_{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{d}_0 + \mathbf{x}_1, \\ \mathbf{d}_{-1} &= \mathbf{b}_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{d}_{-1} + \frac{1}{2}\mathbf{d}_0 + \mathbf{x}_1\right), \\ \frac{3}{2}\mathbf{d}_{-1} - \frac{1}{2}\mathbf{d}_0 &= \mathbf{x}_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{“rechts“} \quad 0 &= \Delta^2 \mathbf{b}_{3(n-1)} = \mathbf{b}_{3(n-1)} - 2\mathbf{b}_{3(n-1)-1} + \mathbf{b}_{3(n-1)-2}, \\ \mathbf{b}_{3(n-1)} &= \mathbf{x}_n = \mathbf{d}_{n-1}, \\ \mathbf{b}_{3(n-1)-2} &= \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{n-2} + \mathbf{d}_{n-3}), \\ 0 &= \mathbf{x}_n - 2\mathbf{b}_{3(n-1)-1} + \frac{1}{2}(\mathbf{d}_{n-2} + \mathbf{d}_{n-3}), \\ 2\mathbf{b}_{3(n-1)-1} &= \frac{1}{2}\mathbf{d}_{n-2} + \frac{1}{2}\mathbf{d}_{n-3} + \mathbf{x}_n, \\ \mathbf{d}_{n-2} &= \mathbf{b}_{3(n-1)-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\mathbf{d}_{n-2} + \frac{1}{2}\mathbf{d}_{n-3} + \mathbf{x}_n\right), \\ -\frac{1}{2}\mathbf{d}_{n-3} + \frac{3}{2}\mathbf{d}_{n-2} &= \mathbf{x}_n. \end{aligned}$$

Somit ersetzen wir die zweite und vorletzte Gleichung durch die neuen.

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & & & & \\ & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & 4 & 1 & & & & & & \\ & & & 1 & 4 & 1 & & & & & \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & & 1 & 4 & 1 & & & \\ & & & & & & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & & \\ & & & & & & & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & & \\ & & & & & & & & & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{-2} \\ \mathbf{d}_{-1} \\ \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{n-4} \\ \mathbf{d}_{n-3} \\ \mathbf{d}_{n-2} \\ \mathbf{d}_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1 \\ 6\mathbf{x}_2 \\ 6\mathbf{x}_3 \\ 6\mathbf{x}_4 \\ \vdots \\ 6\mathbf{x}_{n-2} \\ 6\mathbf{x}_{n-1} \\ \mathbf{x}_n \\ \mathbf{x}_n \end{pmatrix}.$$

Abb. 6.17 Eine kubische B-Spline-Kurve und ihr Kontrollpolygon im \mathbb{E}^2



(6.25) Beispiel B-Spline-Darstellung mit Kontrollpunkten \mathbf{d}_i zum Beispiel (6.16).

$\xi_j, j = 1, 2, 3, 4$	0	1	2	3
\mathbf{x}_j	2	3	3	5

Das LGS für die *de Boor-Ordinaten* lautet

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & & & & & & & & \\ & \frac{3}{2} & \frac{7}{2} & 1 & & & & & & & \\ & & 1 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} & & & & & & \\ & & & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & & & & & & \\ & & & & & 1 & & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{-2} \\ \mathbf{d}_{-1} \\ \mathbf{d}_0 \\ \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{d}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1 \\ 6\mathbf{x}_2 \\ 6\mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{x}_4 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\mathbf{d}_{-2} = 2, \mathbf{d}_{-1} = \frac{37}{15}, \mathbf{d}_0 = \frac{17}{5}, \mathbf{d}_1 = \frac{12}{5}, \mathbf{d}_2 = \frac{62}{15}, \mathbf{d}_3 = 5.$$

(6.26) Beispiel Weitere Notation der natürlichen Randbedingungen

Die Ausgangsbeziehungen sind

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_{i=-2}^{n-1} \mathbf{d}_i N_{i,4}(t), \\ s''(t) &= \sum_{i=-2}^{n-1} \mathbf{d}_i N''_{i,4}(t), \\ N_{i,4}(t) &\text{ mit Träger } [\xi_i, \xi_{i+4}]. \end{aligned}$$

Am linken Rand $t = \xi_1$ des Intervalls gilt

$$\begin{aligned} s''(\xi_1) &= \sum_{i=-2}^{n-1} \mathbf{d}_i N''_{i,4}(\xi_1) \\ &= \mathbf{d}_{-2} N''_{-2,4}(\xi_1) + \mathbf{d}_{-1} N''_{-1,4}(\xi_1) + \mathbf{d}_0 N''_{0,4}(\xi_1) + \mathbf{d}_1 N''_{1,4}(\xi_1). \end{aligned}$$

Auf Grund der Eigenschaften der B-Spline gemäß Abschnitt 6.4 und unter Berücksichtigung der Intervalltransformation

$$x \in [0, 1] \longrightarrow t \in [\xi_1, \xi_2], \quad x = \frac{t - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1},$$

und äquidistanter Stellen erhält man für die zweiten Ableitungen der vier B-Splines folgende Werte.

$$\begin{aligned} N_{-2,4}(x) &= \begin{cases} (1-x)^3, & x \in [0, 1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ N_{-2,4}(t) &= \begin{cases} \frac{(\xi_2 - t)^3}{(\xi_2 - \xi_1)^3}, & t \in [\xi_1, \xi_2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ N''_{-2,4}(t) &= \begin{cases} \frac{6(\xi_2 - t)}{(\xi_2 - \xi_1)^3}, & t \in [\xi_1, \xi_2] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\ N''_{-2,4}(\xi_1) &= \frac{6(\xi_2 - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)^3} = \frac{6}{(\xi_2 - \xi_1)^2}. \\ N_{-1,4}(x) &= \begin{cases} \frac{7}{4}x^3 - \frac{9}{2}x^2 + 3x, & x \in [0, 1] \\ \text{sonst} \end{cases} \\ N_{-1,4}(t) &= \begin{cases} \frac{7}{4} \frac{(t - \xi_1)^3}{(\xi_2 - \xi_1)^3} - \frac{9}{2} \frac{(t - \xi_1)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} + 3 \frac{t - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1}, & t \in [\xi_1, \xi_2] \\ \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

$$N''_{-1,4}(t) = \begin{cases} \frac{7}{4} \frac{6(t - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)^3} - \frac{9}{2} \frac{2}{(\xi_2 - \xi_1)^2}, & t \in [\xi_1, \xi_2] \\ \text{sonst} \end{cases}$$

$$N''_{-1,4}(\xi_1) = -\frac{9}{2} \frac{2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} = \frac{-9}{(\xi_2 - \xi_1)^2}$$

$$N_{0,4}(x) = \begin{cases} -\frac{11}{12}x^3 + \frac{3}{2}x^2, & x \in [0, 1] \\ \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{0,4}(t) = \begin{cases} -\frac{11}{12} \frac{(t - \xi_1)^3}{(\xi_2 - \xi_1)^3} + \frac{3}{2} \frac{(t - \xi_1)^2}{(\xi_2 - \xi_1)^2}, & t \in [\xi_1, \xi_2] \\ \text{sonst} \end{cases}$$

$$N''_{0,4}(t) = \begin{cases} -\frac{11}{12} \frac{6(t - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)^3} + \frac{3}{2} \frac{2}{(\xi_2 - \xi_1)^2}, & t \in [\xi_1, \xi_2] \\ \text{sonst} \end{cases}$$

$$N''_{0,4}(\xi_1) = \frac{3}{2} \frac{2}{(\xi_2 - \xi_1)^2} = \frac{3}{(\xi_2 - \xi_1)^2}$$

$$N_{1,4}(x) = \begin{cases} \frac{1}{6}x^3, & x \in [0, 1] \\ \text{sonst} \end{cases}$$

$$N_{1,4}(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} \frac{(t - \xi_1)^3}{(\xi_2 - \xi_1)^3}, & t \in [\xi_1, \xi_2] \\ \text{sonst} \end{cases}$$

$$N''_{1,4}(t) = \begin{cases} \frac{1}{6} \frac{6(t - \xi_1)}{(\xi_2 - \xi_1)^3}, & t \in [\xi_1, \xi_2] \\ \text{sonst} \end{cases}$$

$$N''_{1,4}(\xi_1) = 0.$$

Somit ist die Zusatzgleichung “links“

$$\begin{aligned} 0 = s''(\xi_1) &= \mathbf{d}_{-2} \frac{6}{(\xi_2 - \xi_1)^2} + \mathbf{d}_{-1} \frac{-9}{(\xi_2 - \xi_1)^2} + \mathbf{d}_0 \frac{3}{(\xi_2 - \xi_1)^2} + \mathbf{d}_1 \cdot 0, \\ 0 &= 2\mathbf{d}_{-2} - 3\mathbf{d}_{-1} + \mathbf{d}_0. \end{aligned}$$

Analog erhält man “rechts“

$$0 = \mathbf{d}_{n-3} - 3\mathbf{d}_{n-2} + 2\mathbf{d}_{n-1}.$$

(6.27) Übung Vervollständigen Sie das LGS für andere ergänzende Randbedingungen.

(C) Die Berechnung des natürlichen kubischen Splines erfolgt wiederum als zusammengesetzte Bézier-Kurve unter Verwendung von zusätzlichen Punkten in den Teilintervallen. Dabei vereinfacht sich die Darstellung, da es sich ja um eine eindeutige Funktion handelt.

Auf jedem Teilintervall $[\xi_i, \xi_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n-1$, $h_i = \Delta\xi_i = \xi_{i+1} - \xi_i$, verwendet man die kubischen Bernstein-Polynome mit den *de Boor-Punkten* \mathbf{b}_k und den Ansatz

$$s(t) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{b}_{3(i-1)+j} B_j^3 \left(\frac{t - \xi_i}{h_i} \right).$$

Wir setzen $\mathbf{b}_{3(i-1)} = f(\xi_i) = f_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, die anderen Kontrollkoeffizienten (Punkte) $\mathbf{b}_{3(i-1)+1}$, $\mathbf{b}_{3(i-1)+2}$ sind zunächst unbekannt und müssen so gewählt werden, dass die Stetigkeit der ersten beiden Ableitungen und die Randbedingungen erfüllt sind. In den inneren Gitterpunkten ξ_i , $i = 2, 3, \dots, n-1$, ist mit der geforderten Glattheit

$$s'(\xi_i) = \frac{3}{h_{i-1}}(\mathbf{b}_{3(i-1)} - \mathbf{b}_{3(i-1)-1}) = \frac{3}{h_i}(\mathbf{b}_{3(i-1)+1} - \mathbf{b}_{3(i-1)}),$$

woraus folgt

$$h_i \mathbf{b}_{3(i-1)-1} + h_{i-1} \mathbf{b}_{3(i-1)+1} = (h_{i-1} + h_i) \mathbf{b}_{3(i-1)}.$$

Die zweiten Ableitungen sind

$$s''(\xi_i) = \frac{6}{h_{i-1}^2}(\mathbf{b}_{3(i-1)} - 2\mathbf{b}_{3(i-1)-1} + \mathbf{b}_{3(i-1)-2}) = \frac{6}{h_i^2}(\mathbf{b}_{3(i-1)+2} - 2\mathbf{b}_{3(i-1)+1} + \mathbf{b}_{3(i-1)})$$

mit der Folgerung

$$-h_i^2 \mathbf{b}_{3(i-1)-2} + 2h_i^2 \mathbf{b}_{3(i-1)-1} - 2h_{i-1}^2 \mathbf{b}_{3(i-1)+1} + h_{i-1}^2 \mathbf{b}_{3(i-1)+2} = (h_i^2 - h_{i-1}^2) \mathbf{b}_{3(i-1)}.$$

Die Randbedingungen lauten

$$\begin{aligned} s''(\xi_1) &= \frac{6}{h_1^2}(\mathbf{b}_2 - 2\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_0) = 0, \\ s''(\xi_n) &= \frac{6}{h_{n-1}^2}(\mathbf{b}_{3(n-1)} - 2\mathbf{b}_{3(n-1)-1} + \mathbf{b}_{3(n-1)-2}) = 0, \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_0, \\ -\mathbf{b}_{3(n-1)-2} + 2\mathbf{b}_{3(n-1)-1} &= \mathbf{b}_{3(n-1)}. \end{aligned}$$

Damit sind alle Bedingungen für die unbekannten Kontrollpunkte $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \dots, \mathbf{b}_{3(n-1)-2}, \mathbf{b}_{3(n-1)-1}$ formuliert.

(6.28) Beispiel Gesucht ist der natürliche kubische Spline zur Referenz $\{(0, 0), (1, 2), (3, 1), (4, 4)\}$, (Beispiel (6.17)).

Die Gleichungen des Systems sind

$$\begin{aligned} 2\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 &= \mathbf{b}_0, \\ h_2\mathbf{b}_2 + h_1\mathbf{b}_4 &= (h_1 + h_2)\mathbf{b}_3, \\ -h_2^2\mathbf{b}_1 + 2h_2^2\mathbf{b}_2 - 2h_1^2\mathbf{b}_4 + h_1^2\mathbf{b}_5 &= (h_2^2 - h_1^2)\mathbf{b}_3, \\ h_3\mathbf{b}_5 + h_2\mathbf{b}_7 &= (h_2 + h_3)\mathbf{b}_6, \\ -h_3^2\mathbf{b}_4 + 2h_3^2\mathbf{b}_5 - 2h_2^2\mathbf{b}_7 + h_2^2\mathbf{b}_8 &= (h_3^2 - h_2^2)\mathbf{b}_6, \\ -\mathbf{b}_7 + 2\mathbf{b}_8 &= \mathbf{b}_9. \end{aligned}$$

Das LGS ist

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & & \\ -4 & 8 & -2 & 1 & & & & & \\ & & & 1 & 2 & & & & \\ & & -1 & 2 & -8 & 4 & & & \\ & & & & -1 & 2 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_4 \\ \mathbf{b}_5 \\ \mathbf{b}_7 \\ \mathbf{b}_8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_0 \\ 3\mathbf{b}_3 \\ 3\mathbf{b}_3 \\ 3\mathbf{b}_6 \\ -3\mathbf{b}_6 \\ \mathbf{b}_9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

mit der Lösung

$$\mathbf{b}_1 = \frac{43}{48}, \mathbf{b}_2 = \frac{43}{24}, \mathbf{b}_4 = \frac{29}{12}, \mathbf{b}_5 = \frac{1}{12}, \mathbf{b}_7 = \frac{35}{24}, \mathbf{b}_8 = \frac{131}{48}.$$

Abb. 6.18

Kontrollpolygon und Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t) = (3t + 3t^2 - 2t^3, 6t - 9t^2 + 7t^3)^T$, $t \in [0, 1]$

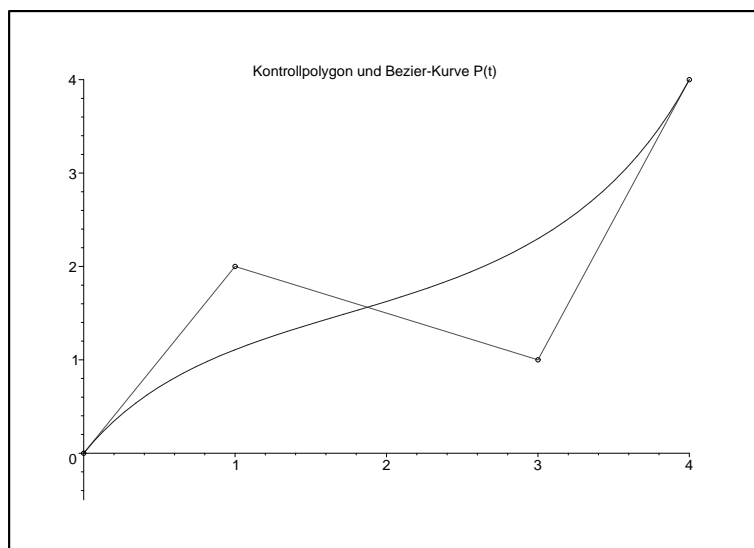
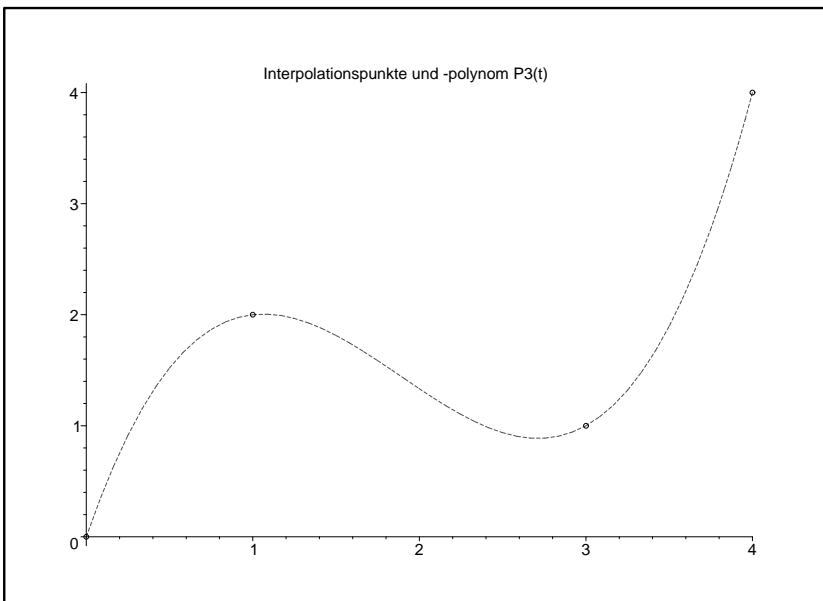
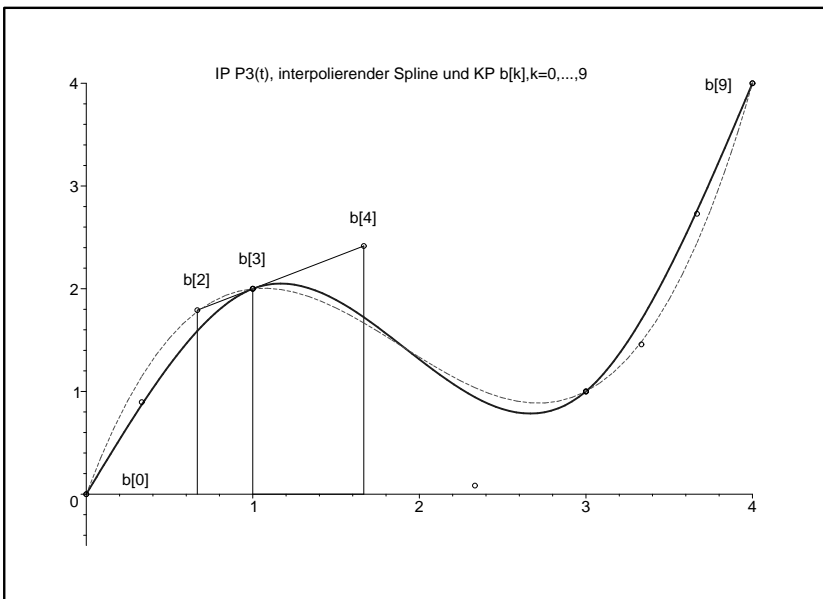


Abb. 6.19

Kubisches Interpolationspolynom $p_3(x) = \frac{1}{2}t^3 - \frac{17}{6}t^2 + \frac{13}{3}t$ zur gegebenen Referenz

**Abb. 6.20**

Interpolationspolynom $p_3(x)$, interpolierender Spline und Kontrollpunkte \mathbf{b}_k , $k = 0, 1, \dots, 9$



Zum Vergleich noch einmal die Koeffizienten von B-Spline- (Beispiel (6.17)) und Bézier-Kurven-Ansatz.

d_1, d_2, \dots, d_6	$0, \frac{43}{48}, \frac{43}{12}, -\frac{13}{12}, \frac{131}{48}, 4$
$\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_9$	$0, \frac{43}{48}, \frac{43}{24}, 2, \frac{29}{12}, \frac{1}{12}, 1, \frac{35}{24}, \frac{131}{48}, 4$

7 Tensorprodukt-Bézier-Flächen

7.1 Bilineare Interpolation

Die Idee der Bézier-Kurven soll nun verwendet werden, um Flächen aus kleinen Flächenstücken, auch Patches genannt, in Bézier-Form zusammenzusetzen.

Im Unterschied zu Kurven (ein Parameter t) werden zur Darstellung von Flächen in \mathbb{E}^3 zwei Parameter u, v benötigt.

Gegeben seien vier Punkte

$$\mathbf{b}_{00}, \mathbf{b}_{01}, \mathbf{b}_{10}, \mathbf{b}_{11} \in \mathbb{E}^3.$$

Man betrachtet die Funktion

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \mathbf{b}_{ij} B_i^1(u) B_j^1(v), \quad u, v \in [0, 1] \\ &= \mathbf{b}_{00} B_0^1(u) B_0^1(v) + \mathbf{b}_{01} B_0^1(u) B_1^1(v) + \mathbf{b}_{10} B_1^1(u) B_0^1(v) + \mathbf{b}_{11} B_1^1(u) B_1^1(v), \end{aligned}$$

wobei die Bernstein-Polynome

$$B_0^1(t) = 1 - t, \quad B_1^1(t) = t, \quad B_j^n(t) = \binom{n}{j} t^j (1 - t)^{n-j}$$

verwendet werden.

Eigenschaften der Bézier-Fläche $\mathbf{x}(u, v)$

- (1) \mathbf{x} ist *bilineare Interpolierende* der \mathbf{b}_{ij} ,
d.h. \mathbf{x} erfüllt die Interpolationseigenschaft. Es ist

$$\mathbf{x}(0, 0) = \mathbf{b}_{00}, \quad \mathbf{x}(0, 1) = \mathbf{b}_{01}, \quad \mathbf{x}(1, 0) = \mathbf{b}_{10}, \quad \mathbf{x}(1, 1) = \mathbf{b}_{11}.$$

Für festes u_0 ist $\mathbf{x}(u_0, v)$ als Funktion von v linear, für festes v_0 ist $\mathbf{x}(u, v_0)$ linear.
Die Kurven $\mathbf{x}(u_0, v)$ und $\mathbf{x}(u, v_0)$ heißen *isoparametrische Kurven*.

- (2) \mathbf{x} besitzt die Matrix-Darstellung

$$\mathbf{x}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 - u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{00} & \mathbf{b}_{01} \\ \mathbf{b}_{10} & \mathbf{b}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - v \\ v \end{pmatrix}.$$

Der Beweis erfolgt durch Nachrechnen.

- (3) \mathbf{x} ist ein *hyperbolisches Paraboloid*.
Das sind zum Beispiel Flächen mit Sattelpunkt (vgl. nachfolgendes Beispiel (7.1)).

(7.1) Beispiel Die vier Kontrollpunkte aus \mathbb{E}^3 sind

$$\mathbf{b}_{00} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{10} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{01} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{11} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= B_0^1(u) \sum_{j=0}^1 \mathbf{b}_{0j} B_j^1(v) + B_1^1(u) \sum_{j=0}^1 \mathbf{b}_{1j} B_j^1(v) \\ &= (1-u)[(1-v)\mathbf{b}_{00} + v\mathbf{b}_{01}] + u[(1-v)\mathbf{b}_{10} + v\mathbf{b}_{11}] \\ &= (1-u)v \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u(1-v) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + uv \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} u \\ v \\ uv \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Da die ersten zwei Komponenten von \mathbf{x} den Koordinatenachsen entsprechen, kann man die Fläche auch als Funktion

$$w(u, v) = uv, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$$

definieren.

Wir verschaffen uns eine Vorstellung von der Funktion

$$\mathbf{x}(u, v) = (x_1(u, v), x_2(u, v), x_3(u, v))^T = (u, v, uv)^T,$$

indem wir sie zunächst aus verschiedenen Blickpunkten (Augpunkten) betrachten.

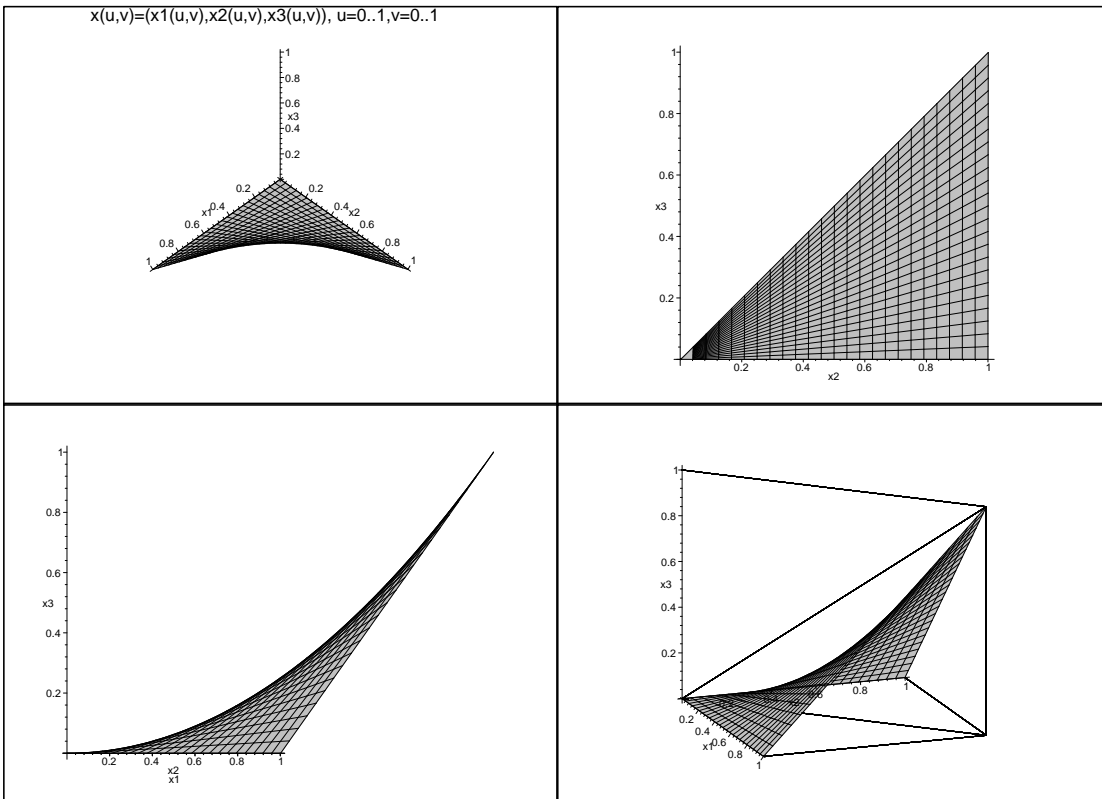
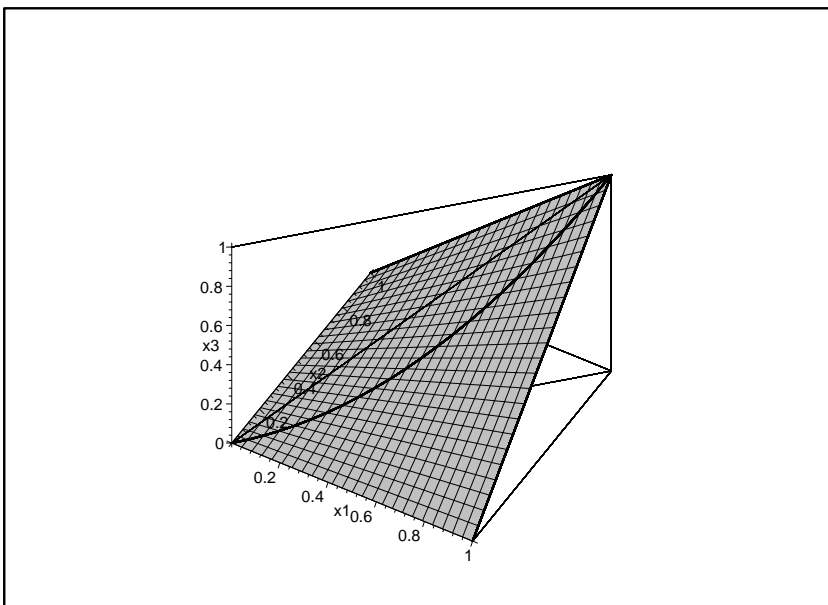
Zugehörige Maple-Grundbefehle

```
> restart:
> with(plots):

> x1:=(u,v)->u;
> x2:=(u,v)->v;
> x3:=(u,v)->u*v;

> plot3d([x1(u,v),x2(u,v),x3(u,v)],u=0..1,v=0..1,
>       scaling=constrained,color=gray,axes=normal,thickness=1,
>       orientation=[45,45], # Standard
>       labels=['x1','x2','x3'],
>       title='x(u,v)=(x1(u,v),x2(u,v),x3(u,v)), u=0..1,v=0..1');
```

Weitere Orientierungen sind $[0, 90]$, $[-45, 90]$, $[-20, 75]$.

Abb. 7.1 Ansichten der Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ **Abb. 7.2** Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ mit der Orientierung $[-60, 45]$ 

Das ist eine Draufsicht auf die Fläche mit zusätzlich eingezeichneten Linien.

Der hyperbolische Charakter der Fläche ist zu erkennen, indem man das Bild der Niveaulinien, also Schnittkurven der Fläche mit horizontalen Ebenen, sowie Schnittkurven der Fläche mit den vertikalen Ebenen der Form $v = c - u$, $c = 1, 1 + h, 1 + 2h, \dots$, betrachtet.

Abb. 7.3 Niveaulinien $w(u, v) = uv = c$, $c = 0.1(0.1)0.9$, im Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$

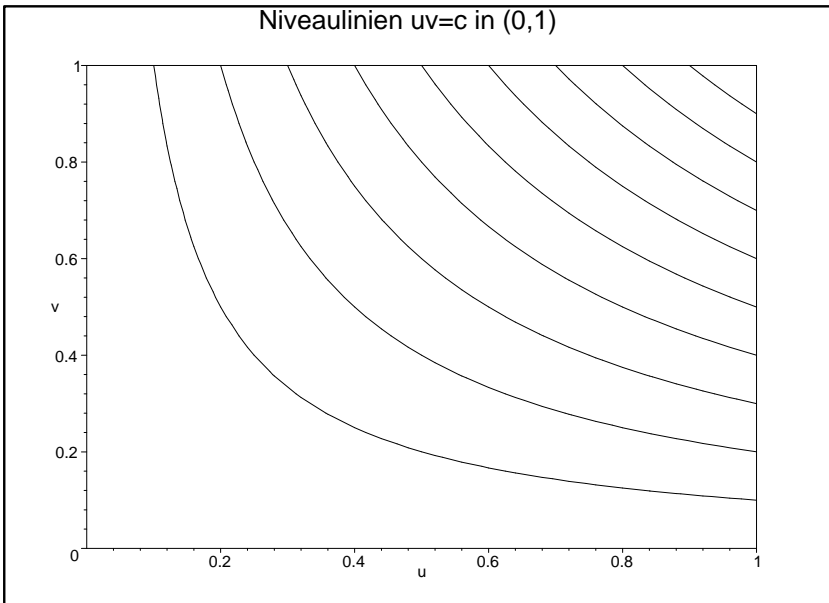
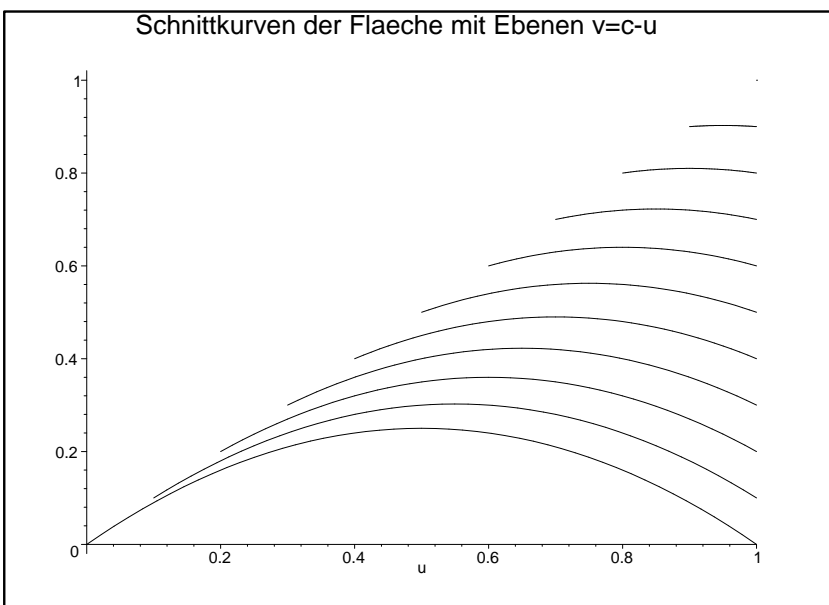
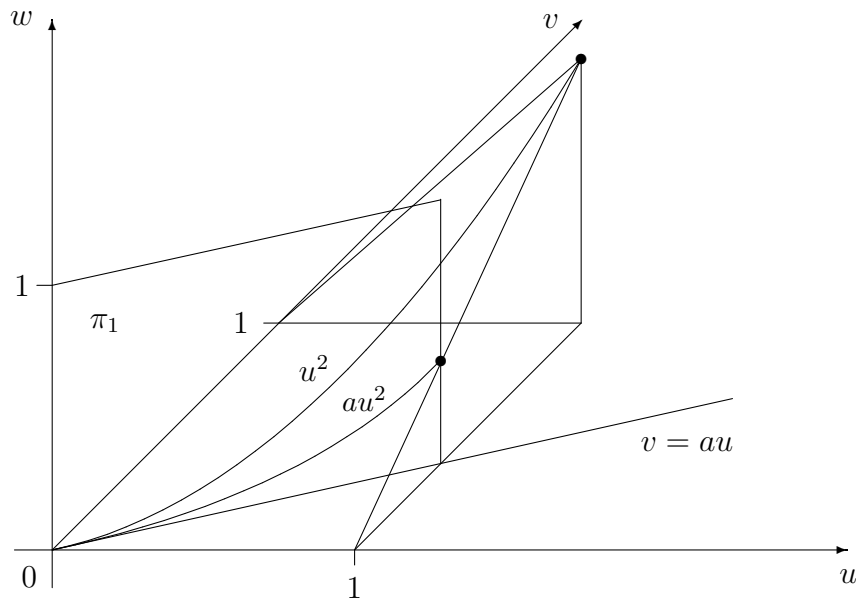


Abb. 7.4 Schnittkurven der Fläche $w(u, v) = uv$ mit den vertikalen Ebenen $v = c - u$, $c = 1(0.1)1.9$, als nach unten geöffnete Parabeln $v(u) = u(c - u)$, $u \in [c - 1, 1]$

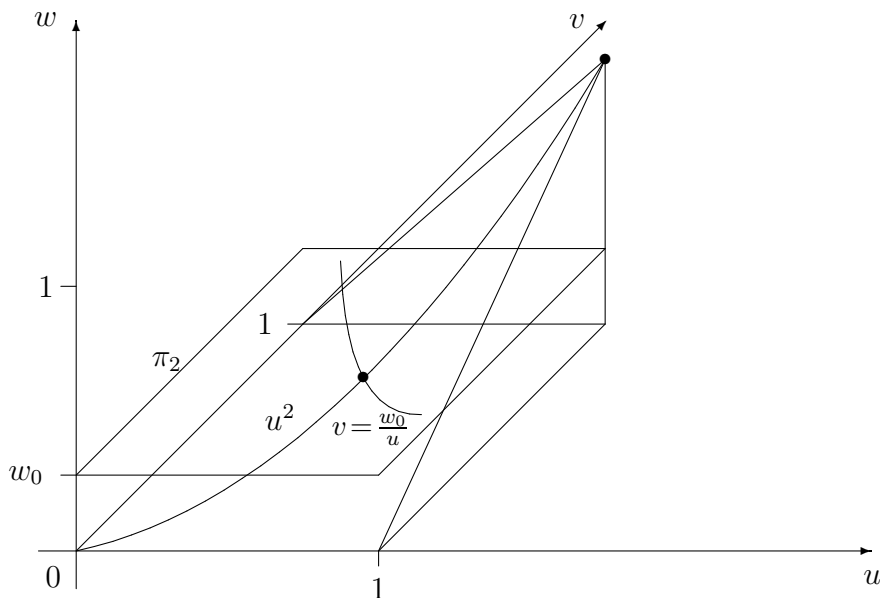


Maple-Befehle

```
> contourplot(u*v,u=0..1,v=0..1,view=[0..1,0..1],contours=10,thickness=2,
  color=black,axes=boxed,title='Niveaulinien uv=c in (0,1)');
> q:=seq(plot(u*(1+0.1*i-u),u=0.1*i..1,color=black,thickness=2),i=0..9):
> plots[display](q,title='Schnittkurven der Fläche mit Ebenen v=c-u');
```

Schnitt der Fläche $(u, v, w(u, v))^T$ (a) mit der Ebene $v = au$, $0 < a \leq 1$.Die Schnittmenge ist die Parabel $(u, au, au^2)^T$, speziell für $a = 1$ die Kurve $(u, u, u^2)^T$.**Abb. 7.5** Parabel $(u, au, au^2)^T$ als Schnittmenge von $w(u, v)$ mit π_1 

$$\pi_1 : v = au$$

(b) mit der Ebene $w = w_0 = \text{const.}$ Die Schnittmenge ist die Hyperbel $v = w_0/u$.**Abb. 7.6** Hyperbel $(u, w_0/u, w_0)^T$ als Schnittmenge von $w(u, v)$ mit π_2 

$$\pi_2 : w(u, v) = w_0 = \text{const}$$

Idee der Verallgemeinerung

Statt bilinearer Interpolanten wählt man allgemeinere Ansatzfunktionen.

Sind $B_i(u)$, $i = 0, \dots, n$, und $\tilde{B}_j(v)$, $j = 0, \dots, m$, Zerlegungen der Eins in $[a, b]$ bzw. $[c, d]$, so bilden die Ansatzfunktionen

$$B_{ij}(u, v) = B_i(u) \tilde{B}_j(v)$$

eine Zerlegung der Eins in $[a, b] \times [c, d]$, denn es gilt

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m B_{ij}(u, v) = \left(\sum_{i=0}^n B_i(u) \right) \left(\sum_{j=0}^m \tilde{B}_j(v) \right) = 1 \quad \text{für alle } (u, v) \in [a, b] \times [c, d].$$

7.2 Bézier-Flächen

Wählen wir als Ansatzfunktionen erneut die Funktionen $B_i(u) = B_i^n(u)$, $\tilde{B}_j(v) = B_j^m(v)$, so beschreibt

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_{ij}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} \binom{n}{i} \binom{m}{j} u^i v^j (1-u)^{n-i} (1-v)^{m-j}$$

das *Tensorprodukt-Bézier-Patch* zu den Kontrollpunkten \mathbf{b}_{ij} .

Die Menge $\{\mathbf{b}_{ij}, i = 0, \dots, n, j = 0, \dots, m\}$ heißt *Bézier-Netz* oder *Kontrollnetz* der Fläche.

Der direkte Algorithmus von de Casteljau

Der eindimensionale Algorithmus (Abschnitt 3.2) kann auf Flächen übertragen werden. Bézier-Kurven entstehen aus wiederholter Anwendung linearer Interpolationen. Wir werden nun Flächen aus wiederholter Anwendung bilinearer Interpolationen gewinnen. Hierzu schreiben wir \mathbf{x} in der Form

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{i0}^{0m}(v) B_i^n(u)$$

mit

$$\mathbf{b}_{i0}^{0m}(v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_j^m(v), \quad i = 0, \dots, n.$$

Analog ist der Ansatz

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{0j}^{n0}(u) B_j^m(v), \quad \mathbf{b}_{0j}^{n0}(u) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u), \quad j = 0, \dots, m,$$

möglich.

Zur Berechnung von \mathbf{x} in einem Punkt (u, v) sind zwei Schleifen zu durchlaufen. Beide Durchlaufrichtungen $v \rightarrow u$ und $u \rightarrow v$ führen auf das gleiche Ergebnis.

(i) v -Schleife: $s = 1, 2, \dots, m$

Setze $\mathbf{b}_{il}^{00}(v) = \mathbf{b}_{il}, \quad l = 0, \dots, m, \quad i = 0, \dots, n,$

berechne $\mathbf{b}_{il}^{0s}(v) = (1-v)\mathbf{b}_{il}^{0,s-1} + v\mathbf{b}_{i,l+1}^{0,s-1}(v), \quad l = 0, \dots, m-s.$

(ii) u -Schleife: $r = 1, 2, \dots, n$

Setze $\mathbf{b}_{l0}^{0m}(u, v) = \mathbf{b}_{l0}^{0m}(v), \quad l = 0, \dots, n,$

berechne $\mathbf{b}_{l0}^{rm}(u, v) = (1-u)\mathbf{b}_{l0}^{r-1,m}(u, v) + u\mathbf{b}_{l+1,0}^{r-1,m}(u, v), \quad l = 0, \dots, n-r.$

Dann ist $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{b}_{00}^{nm}(u, v)$. Das ist der Punkt auf der Bézier-Fläche mit den Parameterwerten (u, v) .

(7.2) Bemerkung Mit Hilfe von Subpolynomen (vgl. Satz (3.4)) kann das Verfahren in der folgenden kompakten oder direkten Form dargestellt werden. Es ist

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \sum_{i=0}^n \left(\sum_{j=0}^{m-s} \mathbf{b}_{ij}^{0s}(v) B_j^{m-s}(v) \right) B_i^n(u) \\ &= \sum_{j=0}^{m-s} \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{ij}^{0s}(v) B_i^n(u) \right) B_j^{m-s}(v) \\ &= \sum_{j=0}^{m-s} \sum_{i=0}^{n-r} \mathbf{b}_{ij}^{rs}(u, v) B_i^{n-r}(u) B_j^{m-s}(v) \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{b}_{ij}^{00}(u, v) = \mathbf{b}_{ij}^0(u) = \mathbf{b}_{ij}^0(v) = \mathbf{b}_{ij},$$

$$\mathbf{b}_{ij}^{rs}(u, v) = \begin{pmatrix} 1-u & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{ij}^{r-1,s-1}(u, v) & \mathbf{b}_{i,j+1}^{r-1,s-1}(u, v) \\ \mathbf{b}_{i+1,j}^{r-1,s-1}(u, v) & \mathbf{b}_{i+1,j+1}^{r-1,s-1}(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-v \\ v \end{pmatrix}, \quad (*)$$

$$i = 0, \dots, n-r, \quad j = 0, \dots, m-s,$$

$$r = 1, \dots, n, \quad s = 1, \dots, m.$$

(7.3) Beispiel (a) Ein Bézier-Kontrollnetz bei $m = n = 2$ sei gegeben durch die Punkte \mathbf{b}_{ij}

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0)^T, \quad (2, 0, 0)^T, \quad (4, 0, 0)^T, \\ &(0, 2, 0)^T, \quad (2, 2, 0)^T, \quad (4, 2, 2)^T, \\ &(0, 4, 0)^T, \quad (2, 4, 4)^T, \quad (4, 4, 4)^T. \end{aligned}$$

Nach einem Schritt des de Casteljau-Algorithmus (*) für $(u, v) = (0.5, 0.5)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} &(1, 1, 0)^T, \quad (3, 1, 0.5)^T, \\ &(1, 3, 1)^T, \quad (3, 3, 2.5)^T. \end{aligned}$$

Der Punkt auf der Fläche ist $(2, 2, 1)^T$.

Die Anwendung des Schleifenalgorithmus $v \rightarrow u$ ergibt die folgenden Formeln.

$u : n, i; \quad v : m, j.$

$u = v = 1/2$

v -Schleife:

$$\mathbf{b}_{00}^{01}(v) = (1-v) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{01}^{01}(v) = (1-v) \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{00}^{02}(v) = (1-v)\mathbf{b}_{00}^{01}(v) + v\mathbf{b}_{01}^{01}(v) = (2, 0, 0)^T,$$

$$\mathbf{b}_{10}^{01}(v) = (1-v) \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{11}^{01}(v) = (1-v) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{10}^{02}(v) = (1-v)\mathbf{b}_{10}^{01}(v) + v\mathbf{b}_{11}^{01}(v) = (2, 2, 1/2)^T,$$

$$\mathbf{b}_{20}^{01}(v) = (1-v) \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_{21}^{01}(v) = (1-v) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{20}^{02}(v) = (1-v)\mathbf{b}_{20}^{01}(v) + v\mathbf{b}_{21}^{01}(v) = (2, 4, 3)^T,$$

u -Schleife:

$$\mathbf{b}_{i,0}^{02}(u, v) = \mathbf{b}_{i,0}^{02}(v), \quad i = 0, 1, 2,$$

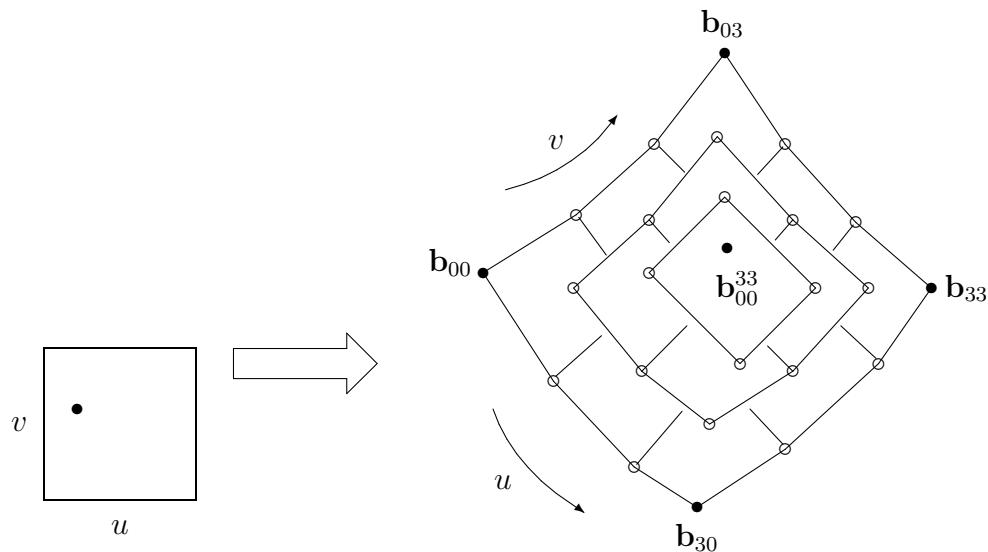
$$\mathbf{b}_{00}^{12}(u, v) = (1-u)\mathbf{b}_{00}^{02}(v) + u\mathbf{b}_{10}^{02}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1/4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{10}^{12}(u, v) = (1-u)\mathbf{b}_{10}^{02}(v) + u\mathbf{b}_{20}^{02}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7/4 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{b}_{00}^{22}(u, v) = (1-u)\mathbf{b}_{00}^{12}(v) + u\mathbf{b}_{10}^{12}(v) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

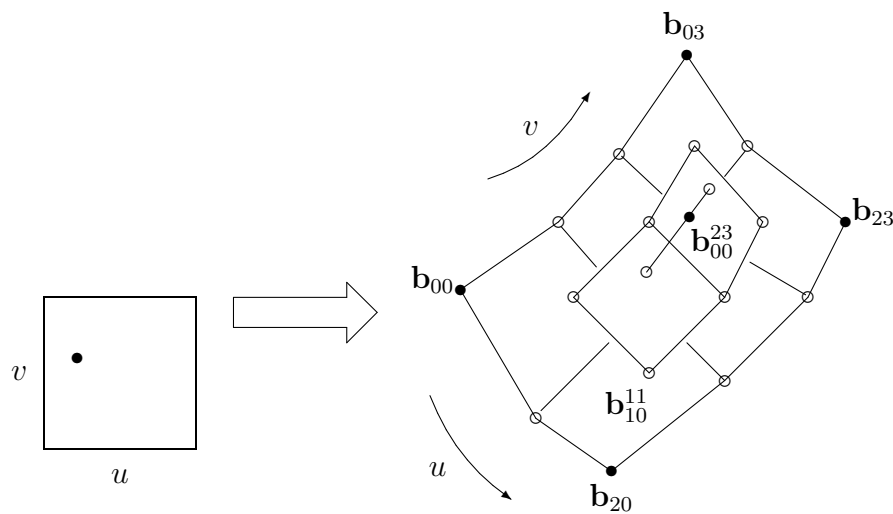
(b) Der direkte Algorithmus von de Casteljau für Bézier-Flächen im Fall $m = n = 3$

Abb. 7.7 Der Punkt auf der Fläche wird durch wiederholte bilineare Interpolationen berechnet



(c) Der Algorithmus von de Casteljau für Bézier-Flächen im Fall $n = 2, m = 3$

Abb. 7.8 Bei $m \neq n$ fährt man auf univariate Weise in der verbleibenden Richtung fort, nachdem keine direkten de Casteljau-Schritte mehr durchgeführt werden können.



(7.4) Übung (a) Begründen Sie die Rekursionsformel (*).

(b) Begründen Sie, dass im Fall $m = n$ der Wert $\mathbf{x}(u, v)$ durch fortgesetzte bilineare Interpolation berechnet werden kann. Skizzieren Sie den Algorithmus.

7.3 Ableitungen

Gehen wir von der obigen Darstellung von $\mathbf{x}(u, v)$ aus.

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v).$$

Erste partielle Ableitungen

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_u = \frac{\partial \mathbf{x}(u, v)}{\partial u} &= \sum_{j=0}^m B_j^m(v) \frac{\partial}{\partial u} \left(\sum_{i=0}^n \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) \right) \\ &= n \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^m \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{ij} B_i^{n-1}(u) B_j^m(v) \\ &\quad \text{mit } \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{ij}, \\ \mathbf{x}_v = \frac{\partial \mathbf{x}(u, v)}{\partial v} &= n \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m-1} \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^{m-1}(v) \\ &\quad \text{mit } \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{b}_{ij}. \end{aligned}$$

Normalenvektor

Die Vektoren $\mathbf{x}_u(u, v)$ und $\mathbf{x}_v(u, v)$ liegen in der Tangentialebene der Fläche \mathbf{x} um den Punkt (u, v) . Damit steht der Vektor (Kreuzprodukt) $\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)$ in (u, v) senkrecht auf der Fläche.

Der Vektor

$$\mathbf{n}(u, v) = \frac{\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)}{\|\mathbf{x}_u(u, v) \times \mathbf{x}_v(u, v)\|}$$

heißt *Normalenvektor* an \mathbf{x} in (u, v) .

An den vier Ecken der Fläche sind die vorkommenden partiellen Ableitungen einfach Differenzen von Randpunkten, z.B. ist

$$\mathbf{n}(0, 0) = \frac{\Delta^{1,0} \mathbf{b}_{00} \times \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{00}}{\|\Delta^{1,0} \mathbf{b}_{00} \times \Delta^{0,1} \mathbf{b}_{00}\|}$$

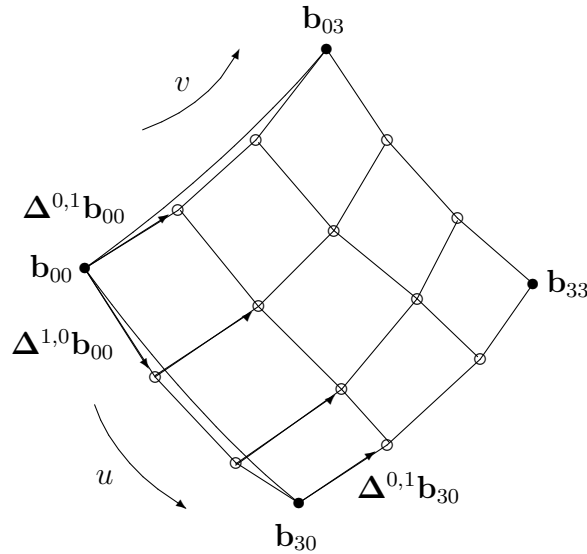
Entartete Flächen sind besonders zu behandeln.

So ist $\mathbf{n}(0, 0)$ an der Ecke nicht definiert, falls die Vektoren $\Delta^{1,0} \mathbf{b}_{00}$ und $\Delta^{0,1} \mathbf{b}_{00}$ linear abhängig sind. Das kann damit zusammenhängen, das eine ganze Randkurve in einen Punkt zusammenfällt, d.h. $\mathbf{b}_{00} = \mathbf{b}_{10} = \dots = \mathbf{b}_{n0}$.

Dann würde die Randkurve $\mathbf{b}(u, 0)$ zu einem einzigen Punkt entarten. In solchen Fällen kann der Normalenvektor trotzdem an der Stelle $v = 0$ definiert sein, muss es aber nicht.

Andere Varianten berücksichtigen in den Betrachtungen an den Ecken kollineare partielle Ableitungen, Tangentialebenen mit Normalen dazu oder das Einschieben von Dreiecksteilflächen zwischen die Vierecke.

Abb. 7.9 Bei Ableitungen quer zum Rand, entlang der Kanten $u = 0$ oder $v = 0$ hängen diese nur von 2 Kontrollpunkten ab.



Twistvektor

Der Twistvektor an die Fläche $\mathbf{x}(u, v)$ ist die gemischte zweite Ableitung

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{x}(u, v) = nm \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{m-1} \Delta^{1,1} \mathbf{b}_{ij} B_i^{n-1}(u) B_j^{m-1}(v)$$

mit

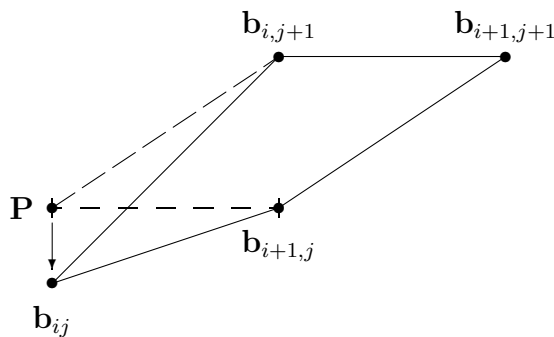
$$\Delta^{1,1} \mathbf{b}_{ij} = \Delta^{1,0}(\Delta^{0,1} \mathbf{b}_{ij}) = \mathbf{b}_{i+1,j+1} - \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j+1} + \mathbf{b}_{ij}.$$

Die Twistvektor-Fläche ist also eine Bézier-Fläche vom Grad $(n-1, m-1)$ und ihre Vektorkoeffizienten haben die Form $nm \Delta^{1,1} \mathbf{b}_{ij}$.

Geometrische Interpretation der Koeffizienten

Zu den drei Punkten $\mathbf{b}_{i+1,j+1}$, $\mathbf{b}_{i+1,j}$, $\mathbf{b}_{i,j+1}$ gibt es einen Punkt \mathbf{P} gegenüber von $\mathbf{b}_{i+1,j+1}$, der die drei Punkte zu einem Parallelogramm ergänzt.

Abb. 7.10 Parallelogrammpunkt \mathbf{P} mit Abweichung von \mathbf{b}_{ij}



Es gilt also $\mathbf{b}_{i,j+1} - \mathbf{P} = \mathbf{b}_{i+1,j+1} - \mathbf{b}_{i+1,j}$.

Durch Einsetzen in die Definition von $\Delta^{1,1}\mathbf{b}_{ij}$ folgt

$$\begin{aligned}\Delta^{1,1}\mathbf{b}_{ij} &= \mathbf{b}_{i+1,j+1} - \mathbf{b}_{i+1,j} - \mathbf{b}_{i,j+1} + \mathbf{b}_{ij} \\ &= \mathbf{b}_{i+1,j+1} - \mathbf{b}_{i+1,j} - (\mathbf{P} + \mathbf{b}_{i+1,j+1} - \mathbf{b}_{i+1,j}) + \mathbf{b}_{ij} \\ &= \mathbf{b}_{ij} - \mathbf{P}.\end{aligned}$$

Der Twistvektor misst demnach in jedem Teilviereck die Abweichung des Bézier-Netzes von einem Parallelogramm.

So misst der Twistvektor, wie stark \mathbf{b}_{11} von der Tangentialebene an \mathbf{b}_{00} abweicht.

Interessant sind Flächen, bei denen alle Teilvierecke selbst Parallelogramme sind. Dort verschwinden die Twistvektoren überall.

(7.5) Beispiel

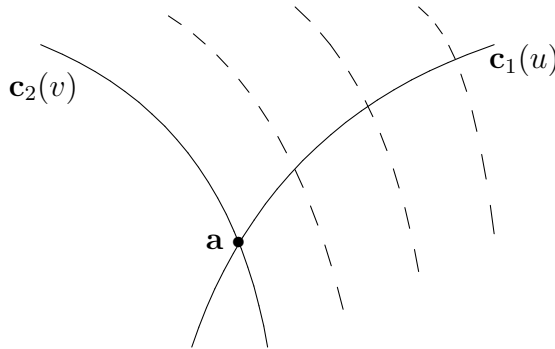
(a) *Schiebeflächen*

$\mathbf{c}_1(u)$ und $\mathbf{c}_2(v)$ seien \mathcal{C}^1 -Kurven, welche sich im Punkt $\mathbf{a} \in \mathbb{E}^3$ schneiden. Die Fläche

$$\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{c}_1(u) + \mathbf{c}_2(v) - \mathbf{a}$$

heißt Schiebefläche.

Abb. 7.11 Schiebefläche bez. \mathbf{a}



Flächen dieser Form haben immer den Twistvektor

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{x}(u, v) = 0.$$

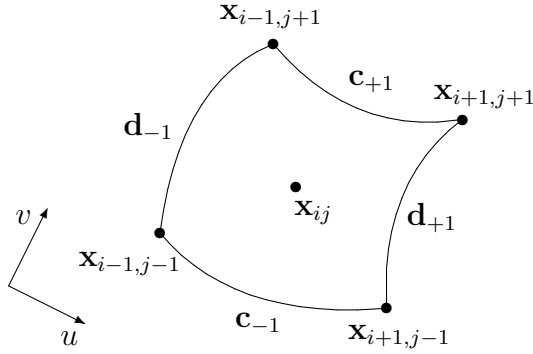
(b) *Coons-Pflaster*

Es seien $u_{i-1} < u_i < u_{i+1}$ und $v_{j-1} < v_j < v_{j+1}$.

Gegeben sei ein Netz von zu interpolierenden Punkten $\mathbf{x}_{ij} = \mathbf{x}(u_i, v_j)$.

Gegeben seien weiter die Randkurven $\mathbf{c}_{\pm 1}(u)$, welche $\mathbf{x}_{i-1,j\pm 1}$ und $\mathbf{x}_{i+1,j\pm 1}$ verbinden, und $\mathbf{d}_{\pm 1}(v)$, welche $\mathbf{x}_{i\pm 1,j-1}$ und $\mathbf{x}_{i\pm 1,j+1}$ verbinden. Insbesondere ist also

$$\begin{aligned}\mathbf{c}_{-1}(u_{i-1}) &= \mathbf{x}_{i-1,j-1}, & \mathbf{c}_{-1}(u_{i+1}) &= \mathbf{x}_{i+1,j-1}, \\ \mathbf{d}_{-1}(v_{j-1}) &= \mathbf{x}_{i-1,j-1}, & \mathbf{d}_{-1}(v_{j+1}) &= \mathbf{x}_{i-1,j+1}, \\ \mathbf{c}_{+1}(u_{i-1}) &= \mathbf{x}_{i-1,j+1}, & \mathbf{c}_{+1}(u_{i+1}) &= \mathbf{x}_{i+1,j+1}, \\ \mathbf{d}_{+1}(v_{j-1}) &= \mathbf{x}_{i+1,j-1}, & \mathbf{d}_{+1}(v_{j+1}) &= \mathbf{x}_{i+1,j+1}.\end{aligned}$$

Abb. 7.12 Lage der Punkte \mathbf{x}_{kl} der Teilfläche

Gesucht ist eine Fläche $\mathbf{F}(u, v)$, welche $\mathbf{c}_{\pm 1}$ und $\mathbf{d}_{\pm 1}$ als Randkurven besitzt. Im Allgemeinen gibt es unendlich viele Lösungen. Eine Lösung ist das *bilineare Coons-Pflaster* bzw. *bilinear gebundene Coons-Pflaster*

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(u, v) = & \begin{pmatrix} 1-s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{-1}(v) \\ \mathbf{d}_{+1}(v) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{-1}(u) & \mathbf{c}_{+1}(u) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \\ & - \begin{pmatrix} 1-s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{-1}(u_{i-1}) & \mathbf{c}_{+1}(u_{i-1}) \\ \mathbf{c}_{-1}(u_{i+1}) & \mathbf{c}_{+1}(u_{i+1}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

mit den lokalen Koordinaten

$$s = \frac{u - u_{i-1}}{u_{i+1} - u_{i-1}}, \quad t = \frac{v - v_{j-1}}{v_{j+1} - v_{j-1}}.$$

Mit

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} (g(u) h(v)) = g_u(u) h_v(v) = \dot{g}(u) \dot{h}(v)$$

ist die Berechnung des Twistvektors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathbf{F}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} 1-s & s \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} \mathbf{d}_{-1}(v) \\ \mathbf{d}_{+1}(v) \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{-1}(u) & \mathbf{c}_{+1}(u) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \\ &- \frac{\partial}{\partial u} \begin{pmatrix} 1-s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{-1}(u_{i-1}) & \mathbf{c}_{+1}(u_{i-1}) \\ \mathbf{c}_{-1}(u_{i+1}) & \mathbf{c}_{+1}(u_{i+1}) \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} \\ &= \frac{\dot{\mathbf{d}}_{+1}(v) - \dot{\mathbf{d}}_{-1}(v)}{u_{i+1} - u_{i-1}} + \frac{\dot{\mathbf{c}}_{+1}(u) - \dot{\mathbf{c}}_{-1}(u)}{v_{j+1} - v_{j-1}} \\ &\quad - \frac{c_{+1}(u_{i+1}) - c_{+1}(u_{i-1}) - c_{-1}(u_{i+1}) + c_{-1}(u_{i-1})}{(u_{i+1} - u_{i-1})(v_{j+1} - v_{j-1})}. \end{aligned}$$

Dieser Wert wird zur Schätzung des Twistvektors im Punkt $\mathbf{x}(u_i, v_j)$ herangezogen.

(7.6) Übung Weisen Sie für das Beispiel (7.5) (b) nach, dass die Kurven $\mathbf{c}_{\pm 1}$ und $\mathbf{d}_{\pm 1}$ innerhalb der Fläche \mathbf{F} verlaufen.

8 Zusammengesetzte Flächen

8.1 Glatte Übergänge

Im Folgenden seien $\mathbf{x}(u, v)$ und $\mathbf{y}(u, v)$ zwei Teilflächen, die über $[u_{I-1}, u_I] \times [v_J, v_{J+1}]$ bzw. $[u_I, u_{I+1}] \times [v_J, v_{J+1}]$ definiert sind. Beide Teilflächen seien in Bézier-Form gegeben. Das Kontrollnetz der linken Teilfläche sei \mathbf{b}_{ij} , $0 \leq i \leq m$, $0 \leq j \leq n$, dasjenige der rechten Teilfläche \mathbf{b}_{ij} , $m \leq i \leq 2m$, $0 \leq j \leq n$. Die Bézier-Darstellungen lauten damit

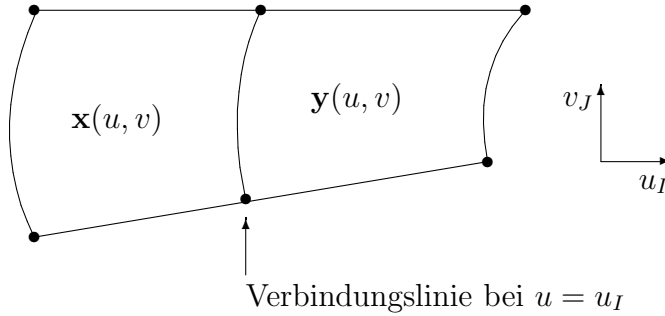
$$\begin{aligned}\mathbf{x}(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{ij} B_i^m \left(\frac{u - u_{I-1}}{u_I - u_{I-1}} \right) B_j^n \left(\frac{v - v_J}{v_{J+1} - v_J} \right), \\ \mathbf{y}(u, v) &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{i+m, j} B_i^m \left(\frac{u - u_I}{u_{I+1} - u_I} \right) B_j^n \left(\frac{v - v_J}{v_{J+1} - v_J} \right).\end{aligned}$$

Beide Teilflächen sind durch die gemeinsame Kurve

$$\mathbf{x}(u_I, v) = \mathbf{y}(u_I, v) = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_{mj} B_j^n \left(\frac{v - v_J}{v_{J+1} - v_J} \right)$$

miteinander verbunden. Die Parameterdarstellung der zusammengesetzten Fläche ist damit stetig.

Abb. 8.1 Zusammengesetzte Fläche mit $\mathbf{x}(u, v)$ und $\mathbf{y}(u, v)$



Ein Kriterium dafür, dass die Parameterdarstellung bez. u bei $u = u_I$ r -mal stetig differenzierbar ist, erhalten wir aus den Aussagen des Satzes (2.18) und der Anwendung der Kettenregel. Für $r = 1$ gilt beispielsweise unter Verwendung der ersten Rückwärts- und Vorwärtsdifferenzen an der Berührungslinie

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u} \mathbf{x}(u_I, v) &= \frac{m}{u_I - u_{I-1}} \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{m-1, i} B_i^{m-1} \left(\frac{v - v_J}{v_{J+1} - v_J} \right), \\ \frac{\partial}{\partial u} \mathbf{y}(u_I, v) &= \frac{m}{u_{I+1} - u_I} \sum_{i=0}^{m-1} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{mj} B_j^{m-1} \left(\frac{v - v_J}{v_{J+1} - v_J} \right).\end{aligned}$$

Da die $B_j^n(v)$, $j = 0, \dots, n$, linear unabhängig sind, ist die Gleichheit der linksseitigen und rechtsseitigen Ableitung für alle v genau dann erfüllt, wenn die einander entsprechenden Summanden der Ableitungen gleich sind.

$$\frac{1}{u_I - u_{I-1}} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{m-1, j} = \frac{1}{u_{I+1} - u_I} \Delta^{1,0} \mathbf{b}_{mj}.$$

Entsprechendes gilt für die höheren Ableitungen.

(8.1) Satz Die Parameterdarstellung der zusammengesetzten Fläche ist bei $u = u_I$ genau dann r -mal stetig differenzierbar bez. u , wenn für $s = 1, \dots, r$ gilt

$$\left(\frac{1}{u_I - u_{I-1}} \right)^s \Delta^{s,0} \mathbf{b}_{m-s,j} = \left(\frac{1}{u_{I+1} - u_I} \right)^s \Delta^{s,0} \mathbf{b}_{m,j}.$$

(8.2) Bemerkung Damit die Fläche bez. u und v stetig differenzierbar sind, genügt es nicht, dass für alle j die Punkte $\mathbf{b}_{m-1,j}$, $\mathbf{b}_{m,j}$ und $\mathbf{b}_{m+1,j}$ kollinear sind. Sie müssen in einem festen Verhältnis stehen, d.h. es muss eine Konstante $\rho > 0$ geben mit

$$\mathbf{b}_{m+1,j} - \mathbf{b}_{m,j} = \rho (\mathbf{b}_{m,j} - \mathbf{b}_{m-1,j}), \quad j = 0, \dots, n.$$

8.2 Bikubische \mathcal{C}^1 -Flächen

Gegeben sei ein rechteckiges Netzwerk von Punkten

$$\mathbf{x}_{IJ}, \quad I = 0, \dots, M, \quad J = 0, \dots, N.$$

Zu diesen soll eine glatte interpolierende Fläche erzeugt werden. Gesucht ist eine \mathcal{C}^1 -Fläche, welche aus bikubischen Patches zusammengesetzt ist. Man verwendet also die kubischen Bernstein-Polynome $B_j^3(t)$.

(8.3) Bemerkung Die Forderung bikubischer Polynome lässt erwarten, dass ähnlich zu den Eigenschaften kubischer Splines auch \mathcal{C}^2 -Flächen konstruiert werden können. Mehr Flexibilität und weniger nichtlokale störende Effekte sind aber zu erwarten, wenn die Glattheitsanforderungen abgeschwächt werden.

Zur Konstruktion der Fläche

(a) Erstellung eines Wireframe-Modells (Drahtmodell)

Zu jeder isoparametrischen Gitterlinie

$$\mathbf{x}_{I,J_0}, \quad I = 0, \dots, M, \quad (J_0 \text{ fest}) \text{ bzw.}$$

$$\mathbf{x}_{I_0,J}, \quad J = 0, \dots, N, \quad (I_0 \text{ fest})$$

wird wie in Abschnitt 6.7 ein \mathcal{C}^2 -Spline erzeugt.

Hierdurch werden die 4 Bézier-Kontrollpunkte

$$\mathbf{b}_{3I,3J} = \mathbf{x}_{IJ}$$

sowie die 8 Hilfspunkte

$$\mathbf{b}_{3I\pm 1,3J}, \quad \mathbf{b}_{3I\pm 2,3J}, \quad \mathbf{b}_{3I,3J\pm 1}, \quad \mathbf{b}_{3I,3J\pm 2}$$

festgelegt.

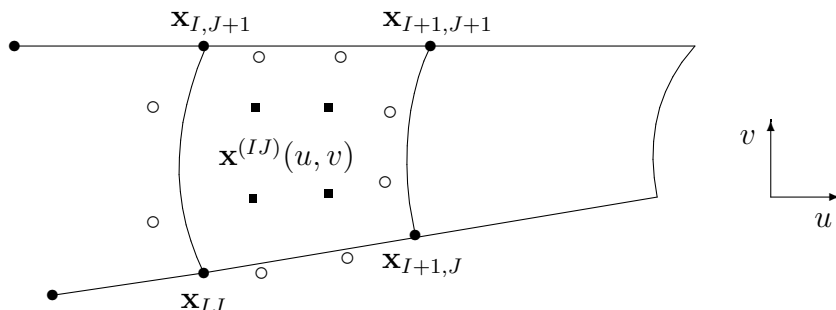
Die Definition jedes Patches erfolgt durch den Ansatz

$$\mathbf{x}^{(IJ)}(u, v) = \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^3 \mathbf{b}_{3I+i, 3J+j} B_i^3 \left(\frac{u - u_I}{u_{I+1} - u_I} \right) B_j^3 \left(\frac{v - v_J}{v_{J+1} - v_J} \right).$$

Unbestimmt bleiben somit in jedem Patch die vier “inneren” Punkte

$$\mathbf{b}_{3I+1, 3J+1}, \quad \mathbf{b}_{3I+2, 3J+1}, \quad \mathbf{b}_{3I+1, 3J+2} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}_{3I+2, 3J+2}.$$

Abb. 8.2 Kontrollpunkte im Patch der Fläche $\mathbf{x}(u, v)$



In Zusammenhang mit Ableitungen bedeutet dies, dass wir noch die Eck-Twistvektoren einer jeden Teilfläche bestimmen müssen, also durch die Vorgabe der Twistvektoren in den Punkten \mathbf{x}_{IJ} .

(b) Festlegung der Twistvektoren

Hierfür ergeben sich mehrere Möglichkeiten.

1. Null-Twists

Die fehlenden Kontrollpunkte ergeben sich aus der Forderung

$$\mathbf{x}_{uv}(u_I, v_J) = 0.$$

Diese Annahme ist sinnvoll, wenn die Kurven des Wireframe-Modells vermuten lassen, dass die Patches nahezu Schiebeflächen sind (vgl. Beispiel (7.5) (a)).

Damit hat man eine \mathcal{C}^1 -stetige globale Fläche. Dies ist eine mathematisch “sichere” Wahl. Sie garantiert aber keine schönen Formen, denn Null-Twistvektoren können unerwünschte Verzerrungen erzeugen.

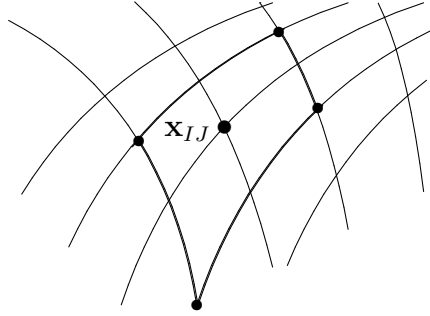
2. Adini-Twists

Die Grundidee ist die Folgende. Bei einer Teilfläche bestimmen die 4 kubischen Randkurven ein bilinear gebundenes Coons-Pflaster, was eine bikubische Funktion ist. Man nimmt die Eck-Twistvektoren dieser Teilfläche als die gesuchten Twistvektoren.

Betrachtet man jedoch das Netzwerk aller Teilflächen, so würden diese Adini-Twistvektoren keine \mathcal{C}^1 -stetige Fläche garantieren.

Eine einfache Modifikation ist notwendig. Man nimmt 4 benachbarte Teilflächen zusammen und lässt sie an den Punkt (u_I, v_J) aufeinander zulaufen. Die 4 äußeren Randkurven dieser Viererfläche definieren wieder ein bilinear gebundenes Coons-Pflaster. Dieses hat dann einen wohldefinierten Twistvektor an dem Parameterwert (u_I, v_J) .

Abb. 8.3 Adinis Twistvektor: Die äußeren Randkurven von 4 benachbarten Teilflächen definieren eine Coons-Fläche. Ihr Twistvektor am “Mittelpunkt“ ist der Adini-Twistvektor.



Das ist der gesuchte Wert

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uv}(u_I, v_J) &= \frac{\mathbf{x}_v(u_{I+1}, v_J) - \mathbf{x}_v(u_{I-1}, v_J)}{u_{I+1} - u_{I-1}} \\ &+ \frac{\mathbf{x}_u(u_I, v_{J+1}) - \mathbf{x}_u(u_I, v_{J-1})}{v_{J+1} - v_{J-1}} \\ &- \frac{\mathbf{x}(u_{I+1}, v_{J+1}) - \mathbf{x}(u_{I-1}, v_{J+1}) - \mathbf{x}(u_{I+1}, v_{J-1}) + \mathbf{x}(u_{I-1}, v_{J-1})}{(u_{I+1} - u_{I-1})(v_{J+1} - v_{J-1})}. \end{aligned}$$

Als Twistvektor in \mathbf{x}_{IJ} wird also der Twistvektor des bilinearen Coons-Pflasters gewählt, welches aus den vier isoparametrischen Verbindungslinien zwischen den Punkten $\mathbf{x}_{I\pm 1, J\pm 1}$ bestimmt wird (vgl. Beispiel (7.5) (b)).

3. Bessel-Twists

Zu den neun Punkten $\mathbf{x}_{I+r, J+s}$, $-1 \leq r, s \leq 1$, bestimme den biquadratischen Interpolanten $\mathbf{Q}(u, v) = a_0 u^2 v^2 + a_1 u^2 v + a_2 u v^2 + a_3 u^2 + a_4 v^2 + a_5 u v + a_6 u + a_7 v + a_8$.

Sind \mathbf{P}_i , $i = 1, \dots, 4$, die bilinearen Interpolanten zu den vier benachbarten Patches (vgl. Abschnitt 7.1), so ist \mathbf{Q} gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(u, v) &= \begin{pmatrix} 1-s & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1(u, v) & \mathbf{P}_2(u, v) \\ \mathbf{P}_3(u, v) & \mathbf{P}_4(u, v) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix}, \\ s &= \frac{u - u_{I-1}}{u_{I+1} - u_{I-1}}, \quad t = \frac{v - v_{J-1}}{v_{J+1} - v_{J-1}}. \end{aligned}$$

Als Twistvektor in \mathbf{x}_{IJ} wird der Twistvektor von \mathbf{Q} gewählt.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{uv}(u, v) &= \mathbf{Q}_{uv}(u, v), \\ \mathbf{x}_{uv}(u_I, v_J) &= \begin{pmatrix} 1-s_I & s_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{q}_{I-1, J-1} & \mathbf{q}_{I-1, J} \\ \mathbf{q}_{I, J-1} & \mathbf{q}_{I, J} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t_J \\ t_J \end{pmatrix}, \\ \mathbf{q}_{IJ} &= \frac{\Delta^{1,1} \mathbf{x}(u_I, v_J)}{\Delta_I \Delta_J}, \quad \Delta_I = u_{I+1} - u_I, \quad \Delta_J = v_{J+1} - v_J, \\ s_I &= \frac{\Delta_{I-1}}{u_{I+1} - u_{I-1}}, \quad t_J = \frac{\Delta_{J-1}}{v_{J+1} - v_{J-1}}. \end{aligned}$$

8.3 Dreieckspatches

Häufig ist es sinnvoll, als zu interpolierende Punkte ein Dreiecks-Bézier-Netz zu verwenden und eine glatte Kurve aus Dreieckspatches zusammenzusetzen. Um eine geeignete Darstellung herzuleiten, erinnern wir uns an die Bézier-Form von Kurven über dem Parameterintervall $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(u) &= \sum_{j=0}^k \mathbf{b}_j \binom{k}{j} \left(\frac{u-a}{b-a} \right)^j \left(1 - \frac{u-a}{b-a} \right)^{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^k \mathbf{b}_j \frac{k!}{(k-j)! j!} \left(\frac{u-a}{b-a} \right)^j \left(\frac{b-u}{b-a} \right)^{k-j}. \end{aligned}$$

In lokalen Koordinaten

$$\lambda_0 = \frac{b-u}{b-a} \geq 0, \quad \lambda_1 = \frac{u-a}{b-a} \geq 0$$

und mit $\mathbf{c}_{k-j,j} = \mathbf{b}_j$ erhalten wir mit $i = k-j$ die symmetrische Form

$$\mathbf{P}(u) = \sum_{i+j=k} \mathbf{c}_{ij} \frac{k!}{i! j!} \lambda_0^i \lambda_1^j.$$

Wegen $\lambda_0 + \lambda_1 = 1$ und

$$\lambda_0 a + \lambda_1 b = \frac{(b-u)a + b(u-a)}{b-a} = u$$

sind λ_0 und λ_1 baryzentrische Koordinaten (vgl. (1.1) (5)) des Parameterintervalls.

Verallgemeinerung auf Dreiecke

Sei $V = \{\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\} \subset \mathbb{E}^3$ eine Menge affin unabhängiger Punkte (d.h. die Punkte liegen nicht auf einer Geraden, sind nicht kollinear).

Man definiert den *Standard-Simplex*

$$\Sigma_2 = \{(\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \mid \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 = 1, \lambda_j \geq 0\}$$

als die Menge der baryzentrischen Koordinaten. Die Verallgemeinerung des Parameterintervalls $[a, b]$ ist der *2-Simplex*

$$[V] = \left\{ \mathbf{u} = \sum_{j=0}^2 \lambda_j \mathbf{v}_j \mid (\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2) \in \Sigma_2 \right\}.$$

Das entspricht der konvexen Hülle $H = [\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2]$ der Punkte \mathbf{v}_j .

Mit dieser Definition kann die obige Bézier-Kurvendarstellung auf Dreieckspatches verallgemeinert werden.

Zu allen Tripeln

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{N}^3 \quad \text{mit} \quad |\alpha| = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = k$$

seien die Kontrollpunkte $\mathbf{c}_\alpha \in \mathbb{E}^3$ gegeben.

Man definiert

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \sum_{|\alpha|=k} \mathbf{c}_\alpha \frac{k!}{\alpha!} \lambda^\alpha = \sum_{|\alpha|=k} \mathbf{c}_\alpha B_\alpha(\lambda)$$

mit

$$\lambda^\alpha = \lambda_0^{\alpha_0} \lambda_1^{\alpha_1} \lambda_2^{\alpha_2} \quad \text{und} \quad \alpha! = \alpha_0! \alpha_1! \alpha_2!$$

sowie den modifizierten Bernstein-Polynomen

$$B_\alpha(\lambda) = \frac{k!}{\alpha!} \lambda^\alpha.$$

Die bisher entwickelte Theorie für Bézier-Kurven lässt sich auf Dreieckspatches übertragen.

(8.4) Beispiel (a) $k = 1$.

Gegeben seien die Punkte \mathbf{c}_{100} , \mathbf{c}_{010} , \mathbf{c}_{001} . Dann ist

$$\mathbf{P}(\mathbf{u}) = \mathbf{c}_{100}\lambda_0 + \mathbf{c}_{010}\lambda_1 + \mathbf{c}_{001}\lambda_2.$$

(b) Für $k = 2$ ist

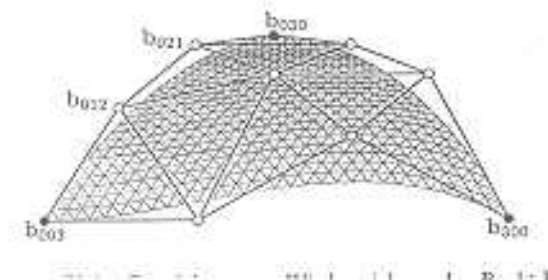
$$\mathbf{P}(u) = \lambda_0^2 \mathbf{c}_{200} + \lambda_1^2 \mathbf{c}_{020} + \lambda_2^2 \mathbf{c}_{002} + 2\lambda_0\lambda_1 \mathbf{c}_{110} + 2\lambda_0\lambda_2 \mathbf{c}_{101} + 2\lambda_1\lambda_2 \mathbf{c}_{011}.$$

Ist z. B. $\lambda_0 = 0$, so ist $\lambda_2 = 1 - \lambda_1$ und die für $\lambda_1 \in [0, 1]$ definierte Kurve

$$\lambda_1 \longrightarrow \underbrace{\lambda_1^2}_{B_0^2(\lambda_1)} \mathbf{c}_{020} + \underbrace{2\lambda_1(1-\lambda_1)}_{B_1^2(\lambda_1)} \mathbf{c}_{011} + \underbrace{(1-\lambda_1)^2}_{B_2^2(\lambda_1)} \mathbf{c}_{002}$$

ist die zu den Punkten $\mathbf{b}_0 = \mathbf{c}_{020}$, $\mathbf{b}_1 = \mathbf{c}_{011}$ und $\mathbf{b}_2 = \mathbf{c}_{002}$ gehörende Bézier-Kurve.

Abb. 8.4 Bézier-Dreiecke: Ein kubisches Flächenstück zusammen mit Kontrollnetz



9 Übungsserien

Serie 1

1. Gegeben seien die affin unabhängigen Punkte $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in \mathbb{E}^2$ sowie ein $\mathbf{x} \in \mathbb{E}^2$ in der konvexen Hülle der \mathbf{a}_i .

Es gilt also

$$(a) \quad 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \text{und} \quad \sum_{i=0}^2 \lambda_i = 1,$$

$$(b) \quad \mathbf{x} = \lambda_0 \mathbf{a}_0 + \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2.$$

Zeige, dass die Koeffizienten λ_i , $i = 1, 2, 3$, definiert sind durch

$$\lambda_0 = \frac{F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{x})}{F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \quad \lambda_1 = \frac{F(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_2, \mathbf{x})}{F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)}, \quad \lambda_2 = \frac{F(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{x})}{F(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)},$$

wobei $F(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ die Fläche des durch die Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ gebildeten Dreiecks sei.

2. Gegeben seien die kollinearen Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^3$.

Man zeige:

Unter einer affinen Abbildung bleibt das Verhältnis

$$ratio(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \frac{\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|_2}{\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|_2}$$

invariant, wobei $\|\cdot\|_2$ die euklidische Vektornorm ist.

3. Man zeige:

Eine Abbildung $\Phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, die für beliebige Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^3$ das Verhältnis $ratio(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ invariant lässt, ist affin.

4. Gegeben sei eine Funktion $\Phi : \mathbb{E}^3 \rightarrow \mathbb{E}^3$, die für beliebige Punkte $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{E}^3$ das Verhältnis $ratio(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ invariant lässt. Außerdem gelte $\Phi(0) = 0$.

Man zeige:

- (a) Für beliebige $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^3$ und $\lambda \in [0, 1]$ ist

$$\Phi(\lambda \cdot \mathbf{x} + (1 - \lambda) \cdot \mathbf{y}) = \lambda \cdot \Phi(\mathbf{x}) + (1 - \lambda) \cdot \Phi(\mathbf{y}).$$

- (b) Für beliebige Punkte $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{E}^3$ ist $\Phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y})$.

5. Für $n = 3$ und $f(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - R^2$ ist die Menge

$$\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{E}^n | f(\mathbf{x}) = 0\}$$

eine Kugeloberfläche.

- (a) Schreibe f in der formalen Polynomform mit Multiindex.
 (b) Gebe Flächen im Fall $n = 3$ an, welche sich implizit mittels Polynomen 1. bzw. 2. Grades darstellen lassen.

- (c) Gebe Kurven Fall $n = 2$ an, welche sich implizit mittels Polynomen 1. bzw. 2. Grades darstellen lassen. Wie lautet das formale Polynom?
6. Gegeben sei die Parameterdarstellung der Schraubenlinie

$$\mathbf{x}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)^T, \quad t \in [0, 2\pi].$$

- (a) Skizziere die zugehörige Kurve \mathcal{K} und zeige, dass $\mathbf{x}(t)$ regulär ist.
- (b) Bestimme zu \mathcal{K} eine weitere reguläre sowie nichtreguläre Parameterdarstellung.
- (c) Parametrisiere die Kurve über die Bogenlänge.
Beobachte hierbei, dass die Bogenlänge von der Parametrisierung unabhängig ist.

Serie 2

1. Beweise für die Bernstein-Polynome $B_j^n(t)$ die

- (a) Symmetrieeigenschaft

$$B_j^n(t) = B_{n-j}^n(1-t),$$

- (b) Rekursionsformel

$$B_j^n(t) = tB_{j-1}^{n-1}(t) + (1-t)B_j^{n-1}(t), \quad j = 1, 2, \dots, n-1, \quad B_0^0(t) \equiv 1,$$

- (c) Beziehung (lineare Präzision)

$$\sum_{j=0}^n \frac{j}{n} B_j^n(t) = t.$$

2. Das n -te Bernstein-Polynom von $f(t)$, $t \in [0, 1]$, ist

$$B_n f(t) = \sum_{j=0}^n f\left(\frac{j}{n}\right) B_j^n(t).$$

Untersuche die Güte der Approximation von $f(t) = \sin(2\pi t)$ mittels Bernstein-Polynomen mit wachsendem Grad n .

3. Gegeben seien die Punkte

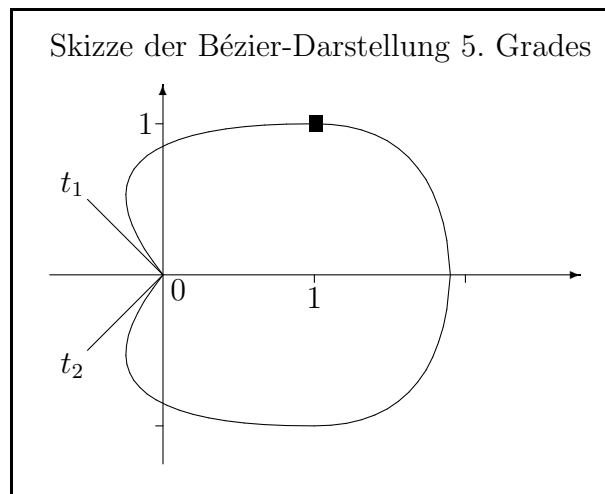
$$(t_0, x_0) = (0, 0), \quad (t_1, x_1) = (1, 1), \quad (t_2, x_2) = (3, 1) \quad \text{und} \quad (t_3, x_3) = (4, 0).$$

Benutze ein Graphikprogramm, um folgende Kurven zu zeichnen.

- (a) Das durch die Punkte (t_i, x_i) verlaufende Polynom höchsten 3. Grades.
- (b) Das zu den Punkten (t_i, x_i) gehörige Bézier-Polynom.

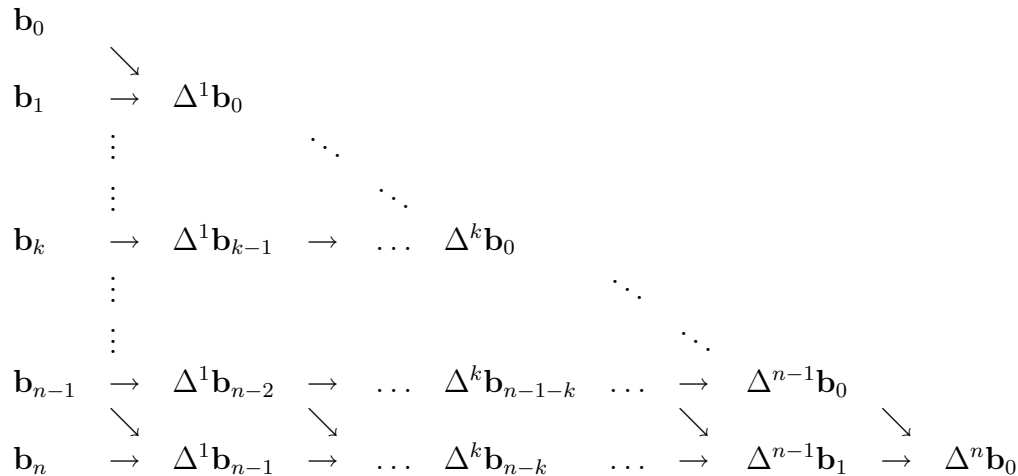
Wie ändern sich beide Kurven, wenn der Wert x_2 geändert wird?

4. Zeige durch Nachrechnen.
Die durch die Punkte $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_n$ ($\mathbf{b}_0 \neq \mathbf{b}_n$), sowie $\mathbf{b}_j = (1 - \frac{j}{n})\mathbf{b}_0 + \frac{j}{n}\mathbf{b}_n$,
 $j = 1, 2, \dots, n-1$, verlaufende Gerade wird durch die Bézier-Darstellung n -ten Grades exakt reproduziert.
Die Aussage gilt auch allgemein für $\mathbf{b}_j = (1 - t_j)\mathbf{b}_0 + t_j\mathbf{b}_n$.
5. Man zeige.
Eine nichtplanare kubische Kurve $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$, in Bézier-Darstellung ist regulär,
d.h. $\dot{\mathbf{P}}(t) \neq 0$ für alle t .
6. Gegeben seien die Punkte \mathbf{b}_i , $i = 0, 1, \dots, 4$, in \mathbb{E}^2 , gemäß
 $\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1)^T$, $\mathbf{b}_2 = (3, 1)^T$, $\mathbf{b}_3 = (2, -1)^T$, $\mathbf{b}_4 = (0, 0)^T$,
sowie das dazugehörige Polynom $\mathbf{P}(t)$ 4. Grades in Bézier-Darstellung.
 - (a) Skizziere die qualitativen Verläufe von $\mathbf{P}(t)$ und $\dot{\mathbf{P}}(t)$.
 - (b) Berechne alle Ableitungen von $\mathbf{P}(t)$.
 - (c) Finde ein Polynom in Bézier-Form 5. Grades, welches denselben Kurvenverlauf hat wie $\mathbf{P}(t)$.
7. Benutze ein Grafikprogramm, um die Bézier-Polynome zu den Punkten
 $\mathbf{b}_j = (\cos(\frac{j\pi}{n}), \sin(\frac{j\pi}{n}))^T$, $j = 0, 1, \dots, n$, für wachsende Werte von n darzustellen.
Welche Kurven sind für große n zu erwarten?
8. Konstruiere durch "intelligentes Probieren" eine Kurve in Bézier-Darstellung höchstens
5. Grades mit qualitativen Verlauf wie in der Skizze angegeben, wo folgende Vorgaben erfüllt sein sollen.
 - (a) Die Kurve ist symmetrisch bezüglich der x -Achse.
 - (b) Anfangs- und Endpunkt der Kurve ist $(0, 0)^T$.
 - (c) Die beiden Tangenten im Punkt $(0, 0)^T$ sind gegeben durch die Vektoren $(-1, \pm 1)^T$.
 - (d) Die Kurve verläuft durch das kleine Quadrat $[0.98, 1.02]^2$.



Serie 3

1. Die Vorwärtsdifferenzen lassen sich durch folgendes Schema bestimmen.



- (a) Berechne für $k = 1, 2, 3$ explizit die k -te iterierte Vorwärtsdifferenz und zeige mittels vollständiger Induktion

$$\Delta^k \mathbf{b}_j = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} (-1)^{k-i} \mathbf{b}_{i+j}.$$

- (b) Benutze die Taylor-Reihenentwicklung um den Punkt $t = 0$, um zu zeigen: Die Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ lässt sich mit Hilfe der Vorwärtsdifferenz darstellen in der Form

$$\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \Delta^j \mathbf{b}_0 t^j.$$

- (c) Erstelle eine Prozedur zur Berechnung der k -ten Vorwärtsdifferenzen $\Delta^k \mathbf{b}_j$, $j = 0, 1, \dots, n - k$.

2. Erstelle ein Programm zur Durchführung des Algorithmus von de Casteljau. Stelle die Polynome $\mathbf{P}(t) = (p_1(t), p_2(t))^T$ grafisch dar.

- (a) $\mathbf{b}_0 = (0, 1)^T$, $\mathbf{b}_1 = (1/3, 4)^T$, $\mathbf{b}_2 = (2/3, 7/2)^T$, $\mathbf{b}_3 = (1, 3/2)^T$

Was folgt aus der Äquidistanz der 1. Komponenten der Punkte \mathbf{b}_j für die Bézier-Koordinatenfunktion $p_1(t)$?

Berechne das Schema von de Casteljau mit $t = 7/20$ und skizziere die Zwischenschritte.

- (b) $\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T$, $\mathbf{b}_1 = (1, 2)^T$, $\mathbf{b}_2 = (4, 3)^T$, $\mathbf{b}_3 = (5, -1)^T$.

3. Man zeige mittels Induktion.

Die Bézier-Kurve $P(t)$ lässt sich für festes t aus den Subpolynomen $\mathbf{b}_j^r(t)$, $r < n$, wie folgt konstruieren.

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{b}_0^n(t) = \sum_{j=0}^{n-r} \mathbf{b}_j^r(t) B_j^{n-r}(t).$$

4. Man zeige.

Für die Polynome $\mathbf{P}(t)$ vom Grade n gilt

$$\Delta^{n+l} \mathbf{P}\left(\frac{j}{n+r}\right) = 0 \text{ für } l > 0.$$

5. Leite unter Verwendung von 1(a) die Darstellung der Ableitung der Bézier-Kurve mit Hilfe von Subpolynomen her.

$$\frac{d^k}{dt^k} \mathbf{P}(t) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \mathbf{b}_j^{n-k}(t).$$

Serie 4

1. Gegeben seien die Punkte

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (1, 4)^T, \mathbf{b}_2 = (3, 5)^T, \mathbf{b}_3 = (4, 3)^T$$

sowie die zugehörige Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$.

(a) Skizziere den zu $\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_3$ gehörigen Polygonzug (Kontrollpolygon).

Führe dreimal hintereinander eine Graderhöhung um einen Grad durch gemäß

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}_0 &= \mathbf{b}_0 \\ \tilde{\mathbf{b}}_k &= \frac{k}{n+1} \mathbf{b}_{k-1} + \frac{n+1-k}{n+1} \mathbf{b}_k, \quad k = 1, 2, \dots, n \\ \tilde{\mathbf{b}}_{n+1} &= \mathbf{b}_n. \end{aligned}$$

Zeichne die dazugehörigen Polygonzüge.

(b) Schreibe ein Programm zur Berechnung der Punkte $E^r \mathbf{b}_j$, $j = 0, 1, \dots, n+r$, aufeinanderfolgender Graderhöhungen, also $r = 1, 2, \dots$, und zur Berechnung des Abstandes

$$A_{n,r} = \max_{j=0,1,\dots,n+r} \left\| E^r \mathbf{b}_j - \mathbf{P}\left(\frac{j}{n+r}\right) \right\|.$$

(c) Untersuche $A_{n,r}$ für wachsendes r . Welche Abnahmerate ermittelt man auf diese Art empirisch?

2. Konstruiere durch Zusammenfügen zweier Bézier-Kurven eine glatte Kurve mit folgenden Eigenschaften.

(a) Anfangspunkt ist $\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T$, die Tangente ist durch $T_0 = (1, 1)^T$ gegeben.

(b) Endpunkt ist $(3, -1)^T$ mit der Tangente $(-1, -1)^T$ gegeben.

(c) Die Kurve verläuft durch den Punkt $(2, 0)^T$ mit der Tangente $(1, 0)^T$.

Führe im zweiten Kurvenabschnitt eine Graderhöhung durch um einen Grad 1. Welche Freiheitsgrade werden hierdurch gewonnen?

3. Gegeben seien drei Punkte $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{E}^2$ und der zugehörige Polygonzug Z sowie die Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$, $t \in [0, 1]$.

Man zeige.

Ist g eine beliebige Gerade, so schneidet $\mathbf{P}(t)$ die Gerade nicht öfter als Z .

4. Gegeben seien die Punkte

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (2, 1)^T, \mathbf{b}_2 = (3, -1)^T$$

sowie die zugehörige Bézier-Kurve $\mathbf{b}_0^2(t)$.

Leite die Formeln her für die Punkte \mathbf{c}_i , $i = 0, 1, 2$, so dass die aus $\mathbf{b}_0^2(t)$ und der zu den Punkten \mathbf{c}_i gehörige Bézier-Kurve $\mathbf{c}_0^2(t)$ zusammengesetzte Kurve zweimal differenzierbar ist.

Wieviele Freiheitsgrade gibt es?

5. Gegeben seien die Punkte

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \mathbf{b}_1 = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{4}\right)^T, \mathbf{b}_2 = \left(1, \frac{7}{4}\right)^T, \mathbf{b}_3 = \left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)^T, \mathbf{b}_4 = \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{4}\right)^T, \mathbf{b}_5 = \left(\frac{15}{4}, \frac{7}{4}\right)^T$$

sowie die zugehörige Bézier-Kurve $\mathbf{b}_0^5(t)$.

Überprüfe verschiedene Möglichkeiten, $\mathbf{b}_0^5(t)$ durch Bézier-Kurven 4. Grades zu approximieren. Stelle $\mathbf{b}_0^5(t)$ und die Approximationen grafisch dar.

6. Gegeben sei die Funktion $y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sowie eine Parameterdarstellung

$f = (f_1, f_2) : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ des Graphen dieser Funktion

$$\{(x, y(x)) : x \in [a, b]\} = \{f(t) : t \in [-1, 1]\}.$$

- (a) Berechne die Ableitung $\frac{dy}{dx}$ mit Hilfe der Ableitungen $\frac{df_1}{dt}$ und $\frac{df_2}{dt}$.

Welche Bedingungen müssen die Ableitungen $\frac{df_i}{dt}$ erfüllen, damit $\frac{dy}{dx}$ definiert ist?

- (b) Es seien

$$y = \begin{cases} 1+x & \text{für } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{für } x \in [0, 1] \end{cases} \quad \text{sowie } f(t) = (t^3, y(t^3)).$$

Man zeige.

$f(t)$ ist differenzierbar, aber $y(x)$ ist nicht differenzierbar.

7. Konstruiere durch Zusammenfügen zweier Bézier-Kurven eine stetige Kurve. Die Kontrollpunkte der beiden Segmente seien

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (1, 1)^T, \mathbf{b}_2 = (2, 0)^T$$

und

$$\mathbf{c}_0 = (2, 0)^T, \mathbf{c}_1 = (10/3, 0)^T, \mathbf{c}_2 = (11/3, -1/2)^T, \mathbf{c}_3 = (3, -1)^T.$$

- (a) Um welchen Punkt ist das erste Segment zu erweitern, um eine stetig differenzierbare zusammengesetzte Bézier-Kurve zu erhalten? Konstruiere diese.
- (b) Konstruiere eine Gesamt-Bézier-Kurve aus der Zusammenfassung aller Kontrollpunkte von (a), wobei \mathbf{b}_0 Anfangs- und \mathbf{c}_3 Endpunkt sind, und vergleiche das Ergebnis mit (a).

8. An die Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{b}_j B_j^3(t)$, $t \in [0, 1]$, mit den Kontrollpunkten

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (2, 2)^T, \mathbf{b}_2 = (5, 2)^T, \mathbf{b}_3 = (7, 1)^T$$

soll eine Bézier-Kurve $\mathbf{Q}(t) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{c}_j B_j^3(t-1)$, $t \in [1, 2]$, mit den Punkten

$$\mathbf{c}_0 = \mathbf{b}_3, \mathbf{c}_1 = (9, 0)^T, \mathbf{c}_2 = (10, \alpha)^T, \mathbf{c}_3 = (15, 0)^T$$

und dem freien reellen Parameter α angefügt werden.

- Zeige, dass der Übergang im Punkt $(7, 1)^T$ stetig differenzierbar ist.
- Bestimme α so, dass der Übergang dort zweimal stetig differenzierbar wird.
- Berechne zum oben ermittelten Wert α die de Boor-Punkte der Kurve und stelle die Bézier-Kurve mit Hilfe von B-Splines dar.

9. Gegenstand der Untersuchungen ist die Bézier-Kurve

$$\mathbf{P}(t) = (p_1(t), p_2(t))^T = \sum_{j=0}^4 \mathbf{b}_j B_j^4(t)$$

zu den Kontrollpunkten

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (4, 3)^T, \mathbf{b}_2 = (8, \alpha)^T, \mathbf{b}_3 = (11, -4)^T, \mathbf{b}_4 = (14, 0)^T$$

mit dem freien reellen Parameter α .

- Zeichne für $\alpha = -5$ einen konvexen geschlossenen Polygonzug, innerhalb dem $\mathbf{P}(t)$ verläuft. Skizziere $\mathbf{P}(t)$. Aus der Skizze soll insbesondere das Verhalten von $\mathbf{P}(t)$ in der Nähe der Endpunkte \mathbf{b}_0 und \mathbf{b}_4 hervorgehen.
- Bestimme sämtliche Ableitungen von $\mathbf{P}(t)$ in Bézier-Form.
- Wähle α so, dass

$$\|\mathbf{P}''(0)\|_2 = \sqrt{p_1''(0)^2 + p_2''(0)^2}$$

minimiert wird.

10. Konstruiert werden soll eine Bézier-Kurve

$$\mathbf{P}(t) = (p_1(t), p_2(t))^T = \sum_{j=0}^n \mathbf{b}_j B_j^n(t), \quad t \in [0, 1],$$

möglichst niedrigen Grades n mit folgenden Eigenschaften.

- $\mathbf{P}(0) = \mathbf{P}(1) = (0, 0)^T$.
- Die Kurve verläuft symmetrisch zur Abszisse (x -Achse).
- Die Tangente im Anfangs- und Endpunkt sollen gleich sein, d.h. die geschlossene Kurve sei stetig differenzierbar.
- Die Kurve verläuft durch den Punkt $(1, 0)^T$.

- (a) Skizziere qualitativ die Kontrollpunkte, das Kontrollpolygon sowie die Kurve, welche die Bedingungen (1) – (4) erfüllen.
Welche ist die kleinstmögliche Anzahl von Kontrollpunkten?
- (b) Bestimme einen Satz von Kontrollpunkten, für die (1) – (4) erfüllt sind.

11. Sei $\mathbf{P}(t) = \sum_{j=0}^3 \mathbf{b}_j B_j^3(t)$ die zu den Kontrollpunkten

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (0, 1, 0)^T, \mathbf{b}_2 = (1, 1, \alpha)^T, \mathbf{b}_3 = (1, 0, 1)^T,$$

α reeller Parameter, gehörende Bézier-Kurve.

Konstruiert werden soll eine Bézier-Kurve $\mathbf{Q}(t)$ 2. Grades, die möglichst glatt an $\mathbf{P}(t)$ angefügt werden kann und als Endpunkt den Punkt $(-2, -3, 1)^T$ hat.

- (a) Wieviel Kontrollpunkte hat $\mathbf{Q}(t)$?
 - (b) Gebe alle Möglichkeiten an für die Wahl der Kontrollpunkte, für die die zusammengesetzte Kurve stetig differenzierbar ist.
 - (c) Kann eine zweimal stetig differenzierbare zusammengesetzte Kurve erzeugt werden?
12. Erzeuge in der (x, y) -Ebene eine bezüglich der x -Achse symmetrische geschlossene Bézier-Kurve möglichst niedrigen Grades mit den folgenden Eigenschaften.
- (1) Anfangs- und damit auch Endpunkt sei $(0, 0)^T$.
 - (2) Die Kurve sei stetig differenzierbar.
 - (3) Die Kurve kreuze die x -Achse nur in den Punkten $(0, 0)^T$ und $(10, 0)^T$.
 - (4) Die Kurve verlaufe im Streifen $-1 \leq y \leq 1$.

13. Gegeben seien die Bézier-Kurven $\mathbf{P}(t)$ und $\mathbf{Q}(t)$ zu den Kontrollpunkten

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0)^T, \mathbf{b}_1 = (2, 1)^T, \mathbf{b}_2 = (3, -1)^T \text{ für } \mathbf{P}$$

und

$$\mathbf{c}_0 = (3, -1)^T, \mathbf{c}_1 = (4, 0)^T, \mathbf{c}_2 = (2, 2)^T \text{ für } \mathbf{Q}.$$

- (a) Man zeige.
Beide Bézier-Kurven können zu einer stetigen Kurve zusammengesetzt werden. Die daraus resultierende Kurve ist nicht stetig differenzierbar.
- (b) Führe für die Bézier-Kurve $\mathbf{P}(t)$ eine Graderhöhung durch.
Berechne insbesondere die neuen Kontrollpunkte $\mathbf{E}\mathbf{b}_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.
- (c) Verändere die y -Koordinate von $\mathbf{E}\mathbf{b}_2$ so, dass die zusammengesetzte Kurve stetig differenzierbar wird.

Serie 5

1. Gegeben seien die Punkte $(0,0)$, $(1,1)$, $(3,2)$, $(4,1)$.

Der lineare Spline aus $S_{2,\Delta}$ ist der Polygonzug

$$S_1(t) = \begin{cases} t & , t \in [0, 1] \\ 0.5(t+1) & , t \in [1, 3] \\ -t+5 & , t \in [3, 4] \end{cases}$$

Der quadratische Spline aus $S_{3,\Delta}$ mit dem Anstieg 0 an der linken Intervallgrenze 0 ist die Funktion

$$S_2(t) = \begin{cases} t^2 & , t \in [0, 1] \\ -0.75t^2 + 3.5t - 1.75 & , t \in [1, 3] \\ -t+5 & , t \in [3, 4] \end{cases}$$

- (a) Gebe die Unterteilung $\Delta = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{l+1}\}$ an.
- (b) Welches sind die unabhängigen Bedingungen für den Spline 1. Grades ($k=2$)? Gebe die Basisfunktionen für den linearen Vektorraum $S_{2,\Delta}$ an.
- (c) Charakterisiere die Basis für den Vektorraum $S_{3,\Delta}$ mit der Bedingung für die Ableitung am linken Intervallende.

2. Gegeben ist

$$f(t) = \begin{cases} t & , t \in [0, 2] \\ -0.5t^2 + 3t - 2 & , t \in [2, 6] \\ -3t + 16 & , t \in [6, 9] \end{cases}$$

- (a) Man zeige.
Mit der Unterteilung $\Delta = \{0, 2, 6, 9\}$ ist $f \in S_{3,\Delta}$.
- (b) Schreibe $f(t)$ als Linearkombination von Monomen und abgebrochenen Potenzen

$$(t-s)_+^k = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } t < s \\ (t-s)^k & , \text{ falls } t \geq s \end{cases}$$

3. Der quadratische Spline $S_2(t)$ aus $S_{3,\Delta}$ mit der Unterteilung $\Delta = \{\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{l+1}\}$ setzt sich aus Polynomen höchstens 2. Grades auf den Teilintervallen $[\xi_i, \xi_{i+1}]$ zusammen.

$$S_2^{(i)}(t) = a_i t^2 + b_i t + c_i, \quad t \in [\xi_i, \xi_{i+1}], \quad i = 0, 1, \dots, l.$$

- (a) Gebe alle Bedingungen für die Konstruktion dieses Splines an.
Diskutiere die Wahl für die Hinzunahme der einen fehlenden Bedingung.
- (b) Notiere alle Bedingungen in Form eines Gleichungssystems.

4. Finde zur Unterteilung $\Delta = \{0, 2, 3\}$ eine Funktion $f(t)$ aus $S_{3,\Delta}$ mit

$$f(0) = 0, \quad f(2) = 2, \quad f(3) = 1.$$

Wieviele Möglichkeiten gibt es?

5. Bestimme zu den Stützstellen

(a) 0,1,2,3

(b) 0,1,3,6

die B-Splines $N_{ik}(t)$ bis zur Ordnung $k = 3$.

Stelle das Polynom $P(t) = 3t^2 - 2t + 1$ mit Hilfe dieser B-Splines $N_{i,3}$ dar.

6. Bestimme zu den Punkten (0,2), (1,3), (2,3), (3,5) Splines der Ordnung 2, 3 (Zusatzbedingung $s'_2(0) = 0$) und 4 (natürliche kub. Splines) als Linearkombinationen von B-Splines.

Berechne den kubischen Spline auch mittels Bézier-Kurve.

7. Erzeuge die Lagrangeschen Basispolynome (Lagrange-Terme, Knotenpunktpolynome (KPP)) zu den Stützstellen $\{1, 2, 5, 6\}$ und stelle sie grafisch dar.

8. Gegeben sei die Maple-Prozedur

```
interpol:=proc(stst::list,stw::list,var::name,typ::string)
```

zur Erzeugung des Interpolationspolynoms in folgenden Darstellungen:

Newton, Lagrange, baryzentrische.

Verwende diese zu ihrer Berechnung bei gegebener Referenz (1, 2), (2, 4), (5, 0), (6, 1).

9. (a) Bestimme die B-Splines der Ordnung 3 zum Gitter $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$ und $\xi_3 = 3$. Wie sind die Knoten Θ_i des erweiterten Gitters zu wählen?

(b) Bestimme die Menge der Splines $S(t)$ der Ordnung 3 mit den Interpolationseigenschaften $S(\xi_1) = -2$, $S(\xi_2) = 0$ und $S(\xi_3) = 3$. Wieviele Freiheitsgrade gibt es?

(c) Bestimme alle Splines der Ordnung 3, welche eine gegebene Parabel $P(t) = at^2 + bt + c$ an den Punkten $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$ und $\xi_3 = 3$ interpolieren. Welcher dieser Splines reproduziert die Parabel exakt?

(d) Finde diejenigen Splines der Ordnung 3 zum oben definierten Gitter, welche alle Parabeln der Form $P(t) = at^2 - 2ct + c$ exakt reproduzieren.

10. Gesucht ist eine stetig differenzierbare Kurve $P(t)$, welche sich stückweise aus Polynomen höchstens 2. Grades zusammensetzt und folgende Bedingungen erfüllt.

$$(1) \quad P(0) = 1, \quad P(1) = 1, \quad P(3) = 0.$$

$$(2) \quad P'(0) = 1.$$

(a) Konstruiere die zugehörige Splinefunktion und zeige ihren Graf.

(b) Stelle die Splinefunktion als zusammengesetzte Bézier-Kurve dar.

Serie 6

1. Ein interpolierender kubischer Spline lässt sich auf dem Intervall $[t_i, t_{i+1}]$ wie folgt darstellen

$$p_i(t) = y_i + \lambda_i(t - t_i) + \frac{\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} - \lambda_i}{t_{i+1} - t_i}(t - t_i)^2 + \frac{\lambda_{i+1} - 2\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} + \lambda_i}{(t_{i+1} - t_i)^2}(t - t_i)^2(t - t_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Bei dem angegebenen Polynom handelt es sich um das kubische Hermitesche Interpolationspolynom zu den Daten (t_i, y_i, λ_i) , $(t_{i+1}, y_{i+1}, \lambda_{i+1})$, d.h. es gilt

$$\left. \begin{aligned} p_i(t_i) &= y_i, & p_i(t_{i+1}) &= y_{i+1} \\ p'_i(t_i) &= \lambda_i, & p'_i(t_{i+1}) &= \lambda_{i+1} \end{aligned} \right\} \quad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Prüfe diese Interpolationsbedingungen mit Hilfe von Maple nach.

2. Der kubische Basis-Spline $N_{i,4}(x) \in C^2(-\infty, \infty)$ mit seinem kompakten Träger $[x_{i-2}, x_{i+2}]$, $x_i = x_0 + ih$, ist intervallweise definiert und hat die Form

$$N_{i,4}(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{i-2})^3 & , x \in [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{i-1}) + 3h(x - x_{i-1})^2 - 3(x - x_{i-1})^3 & , x \in [x_{i-1}, x_i] \\ h^3 + 3h^2(x_{i+1} - x) + 3h(x_{i+1} - x)^2 - 3(x_{i+1} - x)^3 & , x \in [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+2} - x)^3 & , x \in [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Prüfe die entsprechenden Bedingungen nach.

3. Berechne zu $f(t) = 2^t$ die Interpolationspolynome
 - (a) $P(f|1, 2, 4)$,
 - (b) $P(f|1, 1, 3)$,
 - (c) $P(f|1, 1, 1)$.
4.
 - (a) Gebe die dividierte Differenz $f[\Theta_1, \Theta_2]$ an für $\Theta_1 \neq \Theta_2$ sowie für $\Theta_1 = \Theta_2$.
 - (b) Berechne zu $f(t) = \cos(t)$ die dividierte Differenz $f[0, \pi/2, \pi, 3\pi/2]$ mit Hilfe der
 - Rekursionsformel,
 - Formel für die Lagrange-Interpolation.
5. Beweise die Darstellungsformel für die B-Splines

$$N_{ik}(t) = (\Theta_{i+k} - \Theta_i)[\Theta_i, \dots, \Theta_{i+k}](\cdot - t)_+^{k-1}, \quad \text{falls } \Theta_i < \Theta_{i+k}.$$

6. Interpoliere ein Polynom 4. Grades auf dem Intervall $[0,1]$ durch eine natürliche kubische Spline-Funktion auf einem äquidistanten Gitter mit 6 Stützstellen. Diskutiere auch andere Randbedingungen des Splines.

7. Unter allen zweimal stetig differenzierbaren Funktionen f , welche die Datenpunkte (t_i, y_i) , $i = 0, 1, \dots, n$, $t_0 = a$, $t_n = b$, interpolieren, hat die interpolierende kubische natürliche Spline-Funktion s die geringste Biegeenergie

$$\int_a^b s''(t)^2 dt \leq \int_a^b f''(t)^2 dt.$$

Hinweis: Untersuche $\int_a^b (f''(t) - s''(t))^2 dt$ und verwende die zusammengesetzte und partielle Integration für $\int_a^b \Delta''(t)s''(t) dt$ mit $\Delta(t) = s(t) - f(t)$.

8. Gesucht ist ein Polynom $P(t)$ höchstens 3. Grades mit möglichst geringer Krümmung, welches die Eigenschaften erfüllt

$$P(0) = P(1) = 0, \quad P'(0) = 1.$$

- (a) Bestimme $P(t)$ so, daß $\|P''\|_2 = \sqrt{\int_0^1 P''(t)^2 dt}$ minimiert wird.
 (b) Bestimme $P(t)$ so, daß $\|P''\|_\infty = \max_{t \in [0,1]} |P''(t)|$ minimiert wird.
 (c) Man überlege sich ein numerisches Verfahren, welches ausgehend von der Lösung in (b) ein $P(t)$ bestimmt, für das die maximale Krümmung

$$\max_{[0,1]} |\kappa(t)| = \max_{[0,1]} \left| \frac{|P''(t)|}{(1 + P'(t)^2)^{3/2}} \right|$$

minimiert wird.

9. (a) Bestimme zu dem Polynom $P(t) = \alpha t^2 + \beta t + \gamma$ die maximale Krümmung im Intervall $[a, b]$, also $\max_{[a,b]} |\kappa(t)|$.
 (b) Finde unter den Splines der Ordnung 3 zu den Punkten $(0,2)$, $(1,3)$, $(2,3)$, $(3,5)$ denjenigen, der $\max_{[0,3]} |\kappa(t)|$ minimiert.

10. Gesucht ist der kubische Spline $S(t)$ mit den Interpolationseigenschaften

$$S(0) = 0, \quad S(1) = 4, \quad S(2) = 1, \quad S(3) = 0$$

und den natürlichen Randbedingungen $S''(0) = S''(3) = 0$.

- (a) Stelle ein lineares Gleichungssystem für die de Boor-Punkte auf und löse dieses.
 (b) Stelle $S(t)$ als Linearkombination von B-Splines dar.
 (c) Stelle $S(t)$ als zusammengesetzte Bézier-Kurve dar.

11. Berechne zu den Bedingungen

$$S(0) = 0, \quad S'(0) = 6, \quad S(1) = 4, \quad S'(1) = 0, \quad S(2) = 1, \quad S'(2) = 2, \quad S(3) = 0, \quad S'(3) = 0$$

die kubische Hermite-Interpolierende.

Was ändert sich, wenn eine zusätzliche Stützstelle bei $t = 0.5$ eingeführt wird?

12. Gegeben seien die Punkte x_i , $i = 0, 1, \dots, l + 1$, so dass (t_i, x_i) auf einer Geraden liegen.
 Unter welchen Bedingungen reproduzieren Splines der Ordnungen 2 und 4 exakt diese Gerade?

13. Man zeige.
 Die Abbildung

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

ist affin invariant.

14. Man zeige.
 Die Funktion $\mathbf{x}(u, v) : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{E}^k$ mit

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v)$$

bildet die Werte $(u, v) \in [0, 1]^2$ auf die konvexe Hülle der Punkte \mathbf{b}_{ij} ab.

15. Sei

$$\mathbf{x}(u, v) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m \mathbf{b}_{ij} B_i^n(u) B_j^m(v).$$

Charakterisiere die Randkurven $\mathbf{x}(u_0, v)$ und $\mathbf{x}(u, v_0)$ für $u_0 \in \{0, 1\}$ und $v_0 \in \{0, 1\}$.

16. Gegeben sei die Kurve $\mathbf{P}(t) = (t, t^2 + 3t - 2)$, $t \in [0, 1]$.
 Stelle \mathbf{P} in Bézier-Form möglichst niedrigen Grades dar.

17. Gegeben sei die Fläche

$$\mathbf{Q}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} B_0^1(u) + \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} B_1^1(u), \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

\mathbf{Q} soll in Bézier-Form

$$\mathbf{Q}(u, v) = \sum_{i,j=0}^1 \mathbf{b}_{ij} B_i^1(u) B_j^1(v)$$

dargestellt werden. Bestimme die Kontrollpunkte \mathbf{b}_{ij} .

18. Gegeben sei die Fläche

$$\mathbf{Q}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} B_0^2(v) + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^2 \\ -2 \end{pmatrix} B_1^2(v) + 3 \begin{pmatrix} u^2 \\ 0 \end{pmatrix} B_2^2(v), \quad (u, v) \in [0, 1]^2.$$

\mathbf{Q} soll in Bézier-Form

$$\mathbf{Q}(u, v) = \sum_{i,j=0}^2 \mathbf{b}_{ij} B_i^2(u) B_j^2(v)$$

dargestellt werden. Bestimme die Kontrollpunkte \mathbf{b}_{ij} .

19. Untersucht werden soll das Polynom

$$P(u, v) = u^3v + v^3u^2 + u^2v^2 - 3v^3.$$

- (a) Beschreibe die Funktionen (Monome) $1, t, t^2, t^3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ als Linearkombination der Bernstein-Polynome $B_j^3(t)$, $j = 0, 1, 2, 3$.
 - (b) Benutze die eindimensionalen Formeln aus (a), um das zweidimensionale Polynom $P(u, v)$ in Bézier-Form darzustellen.
20. (a) Bestimme die Bézier-Kurve $\mathbf{c}(u)$ 2. Grades mit den folgenden Eigenschaften.
- (1) Anfangspunkt ist $(0, 0)^T$ und Endpunkt ist $(4, 0)^T$.
 - (2) Die Tangenten an Anfangs- und Endpunkt verlaufen in die Richtungen $(1, 1)^T$ bzw. $(1, -2)^T$.
- (b) Bestimme die Bézier-Kurve $\mathbf{d}(v)$ 2. Grades mit den folgenden Eigenschaften.
- (1) Anfangspunkt ist $(0, 0)^T$ und Endpunkt ist $(1, 3)^T$.
 - (2) Die Tangenten an Anfangs- und Endpunkt verlaufen in die Richtungen $(0, 1)^T$ bzw. $(1, 1)^T$.
- (c) Stelle die Schiebefläche zu $\mathbf{c}(u)$ und $\mathbf{d}(v)$ als biquadratische Bézier-Fläche $\mathbf{Q}(u, v)$ dar.
21. Bestimme zur Fläche $\mathbf{x}(u, v) = (u, v, u^2 - v^2)^T$, $(u, v) \in [0, 1]^2$, die biquadratische Bézier-Form

$$\sum_{i,j=0}^2 \mathbf{b}_{ij} B_i^2(u) B_j^2(v)$$

mit den Kontrollpunkten $\mathbf{b}_{ij} \in \mathbb{E}^3$.

Verwende zur Konstruktion auch die Endknoteneigenschaft und die Randkurven.

Literatur

- [1] FARIN, G.: *Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design*. A Practical Guide. Academic Press New York 1988.
Übersetzung aus dem Engl.: *Kurven und Flächen im CAGD*.
Eine praktische Einführung. Vieweg Braunschweig 1994.
- [2] DAHMEN, W.; KUNOTH, A.: *Mathematische Methoden in der geometrischen Datenverarbeitung (CAGD)*. Vorlesungsausarbeitung Freie Universität Berlin 1990.
- [3] NEUNDORF, W.: *Numerische Mathematik*. Vorlesungen, Übungen, Algorithmen und Programme. Shaker Verlag, Aachen 2002.
- [4] NEUNDORF, W.: *MATLAB - Teil III*. Komplexe LGS, Interpolation, Splines. Preprint No M 10/00 Mai 2000 IfMath TU Ilmenau.
- [5] NEUNDORF, W.: *Polynome, Interpolation, Splines und Differentiation*. Preprint No M 16/04 September 2004 IfMath TU Ilmenau.
- [6] NEUNDORF, W.: *Zu Orthogonalsystemen von Polynomen und ihrer Rekursion*. Preprint No M 08/05 Mai 2005 IfMath TU Ilmenau.
- [7] WERNER, W.: *Mathematik lernen mit Maple*. Ein Lehr- und Arbeitsbuch für das Grundstudium. Band 1, 2. dpunkt-Verlag, Heidelberg 1996, 1998.
- [8] KORTENKAMP, ULRICH, TU BERLIN; RICHTER-GEBERT, JÜRGEN, TU MÜNCHEN: *CAS, Dynamische Geometrie Software Cinderella*, interaktive Geometrie mit Cinderella, *Visage*: Visualisierung von Algorithmen, MATHEON DFG Forschungszentrum, Dynamische Geometrie an der Schnittstelle von Schule und Hochschule
- [9] ROVENSKI, VLADIMIR: *Geometry of Curves and Surfaces with Maple*. Birkhäuser Verlag, Boston Basel Berlin 2000.
- [10] POWELL, MICHAEL J.D.: *Approximation Theory and Methods*. Cambridge University Press, Cambridge 1981.
- [11] SCHABACK, R.: *Numerische Approximation*. Jahresbericht DMV 88 (2) 1986, S. 51-81.

Anschrift:

Prof. Dr. rer. nat. habil. Hans Babovsky
PD Dr. rer. nat. habil. Werner Neundorf
Technische Universität Ilmenau, Institut für Mathematik
PF 10 05 65
D - 98684 Ilmenau

E-mail : hans.babovsky@tu-ilmenau.de
E-mail : werner.neundorf@tu-ilmenau.de

Homepage : <http://www.tu-ilmenau.de/num/team/werner-neundorf/>